

Sobre a Coloração Total Semiforte

Defesa de Mestrado

Atílio Gomes Luiz

Orientadora

Profa. Dra. Célia Picinin de Mello

Coorientadora

Profa. Dra. Christiane Neme Campos

Universidade Estadual de Campinas

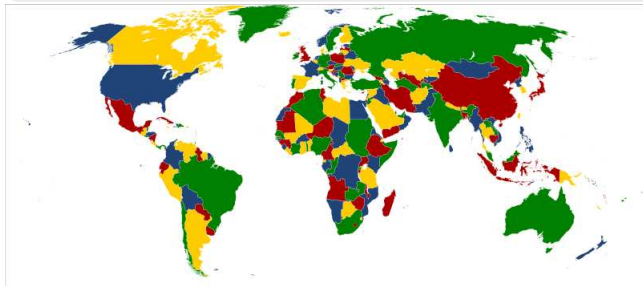
28 de abril de 2014

Introdução

Origem da Coloração de Grafos

Problema das Quatro Cores (Francis Guthrie, 1852)

É possível colorir qualquer mapa político com no máximo *quatro cores* de modo que quaisquer duas regiões vizinhas possuam cores distintas?



Enunciado (como conjectura) em 1852 e demonstrado por Appel e Haken em 1977.



Francis Guthrie

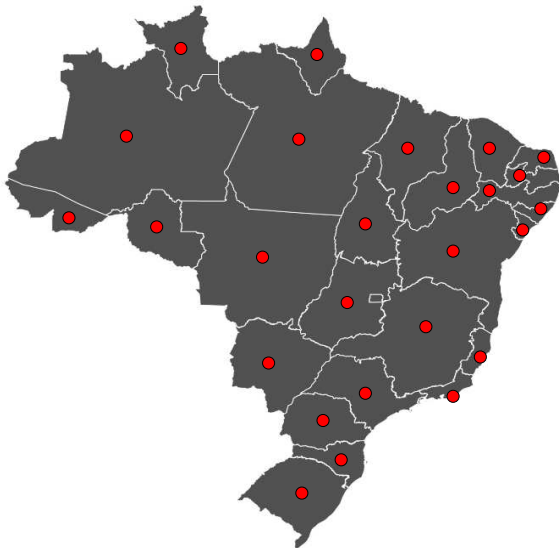


Appel e Haken

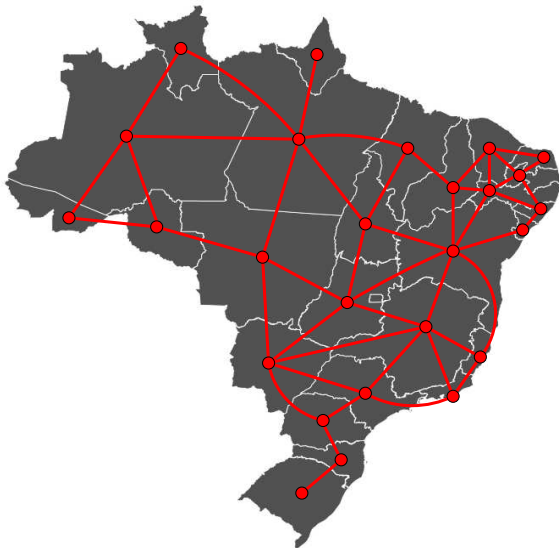
Origem da Coloração de Grafos



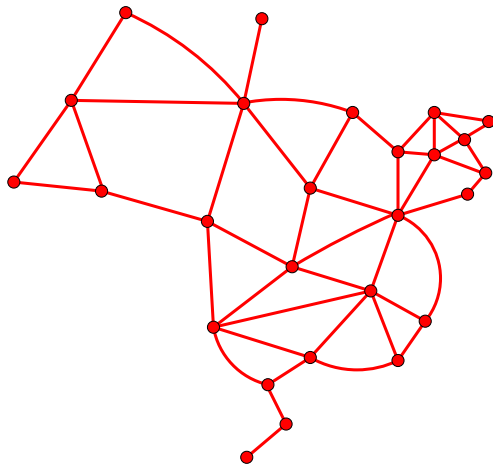
Origem da Coloração de Grafos



Origem da Coloração de Grafos

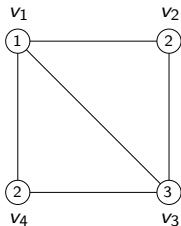


Origem da Coloração de Grafos



Coloração de vértices

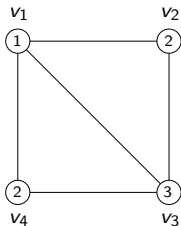
Uma *k-coloração de vértices* de um grafo sem laços G é um mapeamento $\phi: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de modo que vértices adjacentes possuam cores distintas.



Denotamos por $\chi(G)$ o menor número de cores k para o qual G admite uma k -coloração de vértices.

Coloração de vértices

Uma *k-coloração de vértices* de um grafo sem laços G é um mapeamento $\phi: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de modo que vértices adjacentes possuam cores distintas.



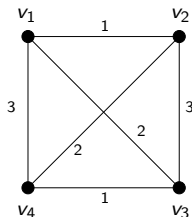
Denotamos por $\chi(G)$ o menor número de cores k para o qual G admite uma k -coloração de vértices.

Teorema (Brooks, 1941)

Se G conexo tal que $G \not\cong K_{2n+1}$ e $G \not\cong C_{2n+1}$, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Tait (1880)

Um grafo plano, 3-regular e sem arestas de corte admite uma 4-coloração de faces se e somente se ele admite uma 3-coloração de arestas.

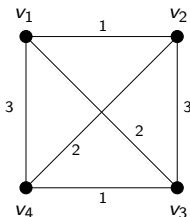


Denotamos por $\chi'(G)$ o menor número de cores k para o qual G admite uma k -coloração de arestas.

Coloração de arestas

Tait (1880)

Um grafo plano, 3-regular e sem arestas de corte admite uma 4-coloração de faces se e somente se ele admite uma 3-coloração de arestas.



Denotamos por $\chi'(G)$ o menor número de cores k para o qual G admite uma k -coloração de arestas.

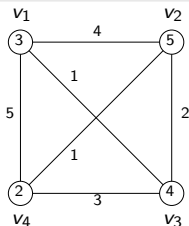
Teorema (Vizing, 1964)

Se G é um grafo simples, então $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.



Vizing

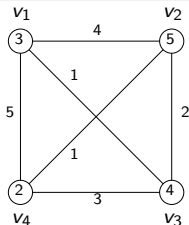
Entre os anos de 1965 e 1968, Behzad e Vizing introduziram, de maneira independente, o conceito de **coloração total**.



Denotamos por $\chi''(G)$ o menor número de cores k para o qual G admite uma k -coloração total.

Coloração total

Entre os anos de 1965 e 1968, Behzad e Vizing introduziram, de maneira independente, o conceito de **coloração total**.



Denotamos por $\chi''(G)$ o menor número de cores k para o qual G admite uma k -coloração total.

Conjetura (Behzad 1965, Vizing 1966)

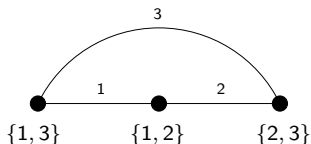
Se G é um grafo simples, então $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$.



Behzad

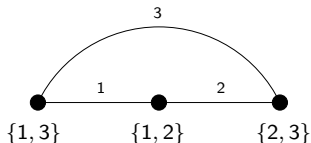
Rotulação de um grafo

Podemos induzir uma rotulação dos vértices de G a partir de uma coloração de arestas de G .

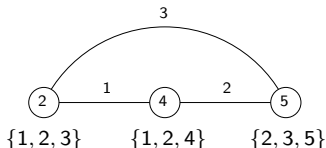


Rotulação de um grafo

Podemos induzir uma rotulação dos vértices de G a partir de uma coloração de arestas de G .



Podemos induzir uma rotulação dos vértices de G a partir de uma coloração total de G .



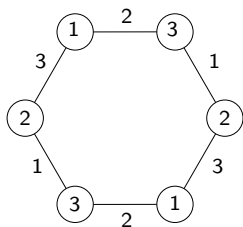
- Seja G um grafo simples munido de uma coloração total π .

- Seja G um grafo simples munido de uma coloração total π .
- Defina $C(u) := \{\pi(u)\} \cup \{\pi(uv) : uv \in E(G)\}$.

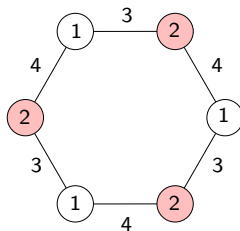
- Seja G um grafo simples munido de uma coloração total π .
- Defina $C(u) := \{\pi(u)\} \cup \{\pi(uv) : uv \in E(G)\}$.
- Dois vértices $u, v \in V(G)$ são *distinguidos* quando $C(u) \neq C(v)$.

Coloração semiforte

- Seja G um grafo simples munido de uma coloração total π .
- Defina $C(u) := \{\pi(u)\} \cup \{\pi(uv) : uv \in E(G)\}$.
- Dois vértices $u, v \in V(G)$ são *distinguidos* quando $C(u) \neq C(v)$.



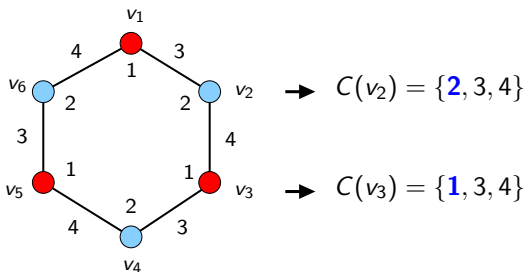
(g) Sem vértices distinguidos.



(h) Com vértices adjacentes distinguidos.

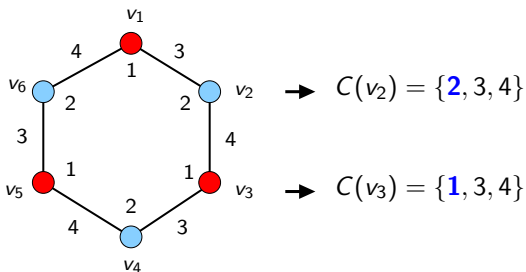
Coloração Total Semiforte

- Seja G um grafo simples munido de uma coloração total ϕ .
- ϕ é **semiforte** se para quaisquer dois vértices adjacentes $u, v \in V(G)$, temos $C(u) \neq C(v)$.



Coloração Total Semiforte

- Seja G um grafo simples munido de uma coloração total ϕ .
- ϕ é **semiforte** se para quaisquer dois vértices adjacentes $u, v \in V(G)$, temos $C(u) \neq C(v)$.



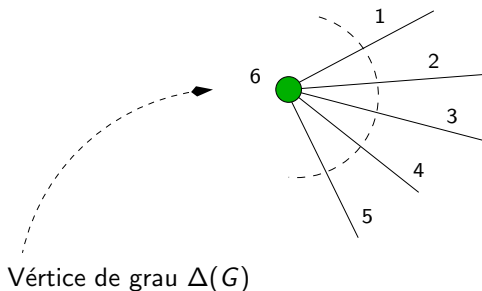
- $C'(v) := \{\phi(uv) : uv \in E(G)\};$
- $\overline{C}(v) := \{1, \dots, k\} \setminus C(v).$

Número cromático total semiforte

O **número cromático total semiforte**, $\chi''_a(G)$, é o menor número de cores para o qual G admite uma coloração total semiforte.

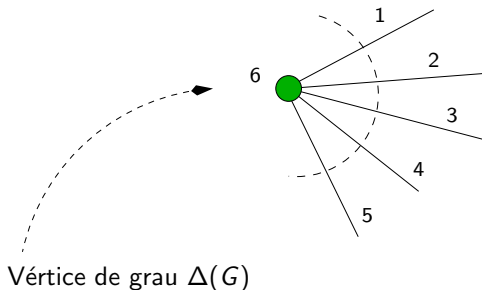
Número cromático total semiforte

O **número cromático total semiforte**, $\chi''_a(G)$, é o menor número de cores para o qual G admite uma coloração total semiforte.



Número cromático total semiforte

O **número cromático total semiforte**, $\chi''_a(G)$, é o menor número de cores para o qual G admite uma coloração total semiforte.



Limite inferior I

$$\chi''_a(G) \geq \Delta(G) + 1$$

Número cromático total semiforte

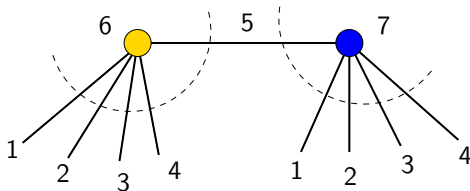
Limite inferior II

Se G possui pelo menos dois vértices adjacentes de grau máximo, então

$$\chi''_a(G) \geq \Delta(G) + 2.$$

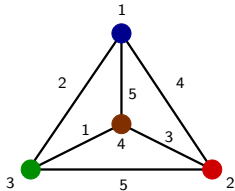
$\Delta + 1$ cores

$\Delta + 1$ cores

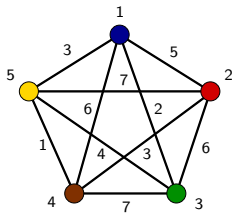


Grafos Completos (Zhang et al. [13])

$$\chi_a''(K_n) = \begin{cases} \Delta(K_n) + 2 & \text{se } n \text{ é par,} \\ \Delta(K_n) + 3 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$



$$\chi_a''(K_4) = \Delta(K_4) + 2 = 5$$



$$\chi_a''(K_5) = \Delta(K_5) + 3 = 7$$

Ciclos (Zhang et al. [13])

$$\chi''_a(C_n) = 4, \text{ para } n \geq 4.$$

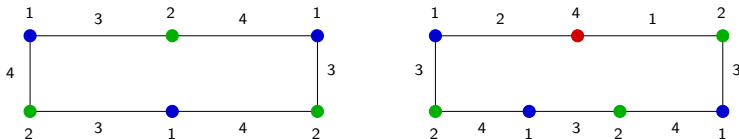
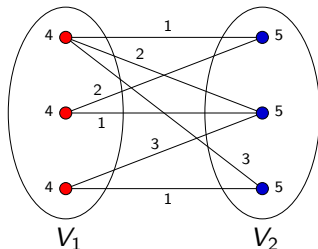


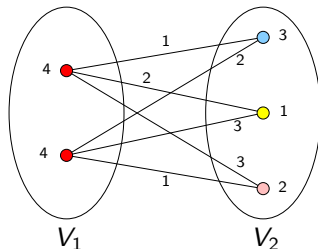
Figura: Ciclos C_6 e C_7 munidos de uma 4-coloração total semiforte.

Bipartidos (Chen [3])

Se G é bipartido, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.



(a) Coloração total semiforte com $\Delta(G) + 2$ cores.

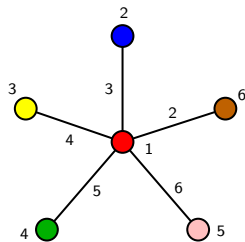


(b) Coloração total semiforte com $\Delta(G) + 1$ cores.

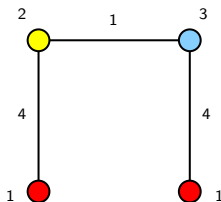
Conjetura da Coloração Total Semiforte

Conjetura (Zhang et al. [13])

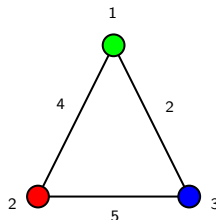
Se G é um grafo simples, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 3$.



$$\Delta(G) + 1$$



$$\Delta(G) + 2$$



$$\Delta(G) + 3$$

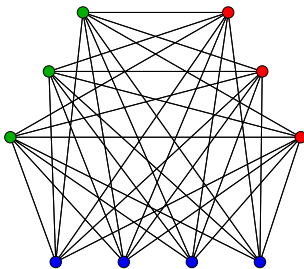
A *Conjetura da Coloração Total Semiforte* foi verificada para outras classes de grafos:

- Grafos com $\Delta(G) = 3$ (H. Wang [10], X. Chen [3], J. Hulgan [7]).
- Grafos de Halin generalizados com $\Delta(G) \geq 6$ (X. Chen e Z. Zhang [4]).
- Hipercubos (M. Chen e X. Guo [1]).
- Grafos exoplanares (Y. Wang e W. Yang [12]).
- Grafos indiferença (V. Pedrotti e C. P. de Mello [9]).
- Grafos planares com $\Delta(G) \geq 11$ (D. Huang e W. Wang [5]).

Grafos tripartidos

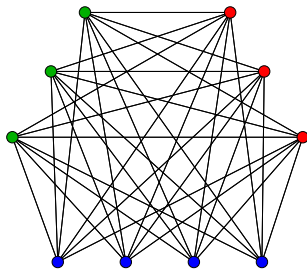
Grafos tripartidos

Um grafo G é tripartido se $V(G)$ admite uma partição $\{V_1, V_2, V_3\}$, tal que quaisquer dois vértices adjacentes pertençam a partes distintas.



Grafos tripartidos

Um grafo G é tripartido se $V(G)$ admite uma partição $\{V_1, V_2, V_3\}$, tal que quaisquer dois vértices adjacentes pertençam a partes distintas.



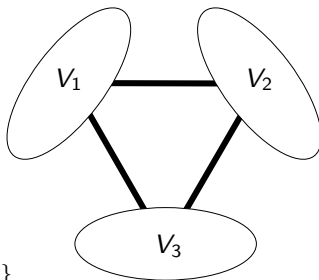
Resultado obtido:

Teorema

Se G é um grafo tripartido, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 3$.

Grafos tripartidos

Ilustração da demonstração:



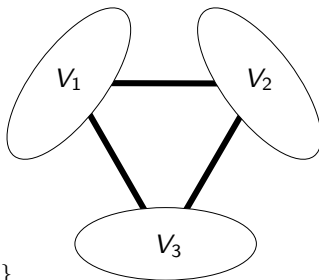
$$S_E := \{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$$

$$S_V := \{\Delta(G) + 2, \Delta(G) + 3\}$$

Seja G tripartido com partes V_1 , V_2 e V_3 e sejam os conjuntos de cores
 $S_E := \{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$ e $S_V := \{\Delta(G) + 2, \Delta(G) + 3\}$.

Grafos tripartidos

Ilustração da demonstração:



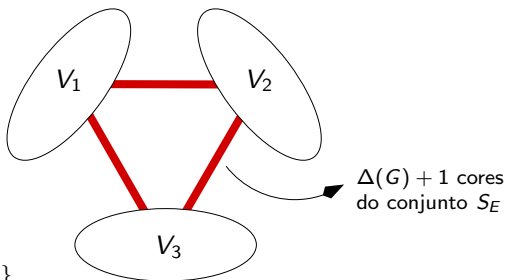
$$S_E := \{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$$

$$S_V := \{\Delta(G) + 2, \Delta(G) + 3\}$$

Construimos uma coloração $\phi: V(G) \cup E(G) \rightarrow S_V \cup S_E$.

Grafos tripartidos

Ilustração da demonstração:

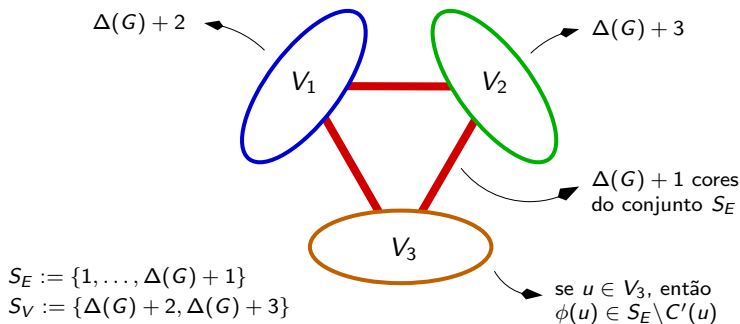


$$S_E := \{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$$
$$S_V := \{\Delta(G) + 2, \Delta(G) + 3\}$$

- Pelo Teorema de Vizing, $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.
- Colorimos as arestas de G com as $\Delta(G) + 1$ cores do conjunto S_E .

Grafos tripartidos

Ilustração da demonstração:



Finalizamos a coloração ϕ , colorindo os vértices de G como ilustrado acima.

Grafos tripartidos completos

Grafos tripartidos completos **sem** vértices de grau máximo adjacentes

Teorema

Se é G um grafo tripartido completo que não possui vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Grafos tripartidos completos **sem** vértices de grau máximo adjacentes

Teorema

Se é G um grafo tripartido completo que não possui vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.

- Obtivemos $(\Delta(G) + 2)$ -colorações totais semifortes para algumas famílias de grafos tripartidos completos com vértices de grau máximo adjacentes. Quando $|V_1| = |V_2|$ e $|V_3| \geq 2|V_1|$.

Grafos tripartidos completos

Grafos tripartidos completos **sem** vértices de grau máximo adjacentes

Teorema

Se é G um grafo tripartido completo que não possui vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.

- Obtivemos $(\Delta(G) + 2)$ -colorações totais semifortes para algumas famílias de grafos tripartidos completos com vértices de grau máximo adjacentes. Quando $|V_1| = |V_2|$ e $|V_3| \geq 2|V_1|$.

Conjetura

Se G é um grafo tripartido completo, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Grafos com $\Delta(G) = 3$

Grafos com $\Delta(G) = 3$

Teorema (Wang, Chen, Hulgan)

Se G é um grafo simples com $\Delta(G) = 3$, então $\chi''_a(G) \leq 6$.

Grafos com $\Delta(G) = 3$

Teorema (Wang, Chen, Hulgan)

Se G é um grafo simples com $\Delta(G) = 3$, então $\chi''_a(G) \leq 6$.

Esboço da demonstração:

- 1 Seja G simples com $\Delta(G) = 3$;

Grafos com $\Delta(G) = 3$

Teorema (Wang, Chen, Hulgan)

Se G é um grafo simples com $\Delta(G) = 3$, então $\chi''_a(G) \leq 6$.

Esboço da demonstração:

- 1 Seja G simples com $\Delta(G) = 3$;
- 2 $\chi''_a(K_4) = 5$. Portanto, suponha $G \not\cong K_4$;

Grafos com $\Delta(G) = 3$

Teorema (Wang, Chen, Hulgan)

Se G é um grafo simples com $\Delta(G) = 3$, então $\chi''_a(G) \leq 6$.

Esboço da demonstração:

- 1 Seja G simples com $\Delta(G) = 3$;
- 2 $\chi''_a(K_4) = 5$. Portanto, suponha $G \not\cong K_4$;
- 3 G não pode ser um ciclo, pois $\Delta(G) = 3$;

Grafos com $\Delta(G) = 3$

Teorema (Wang, Chen, Hulgan)

Se G é um grafo simples com $\Delta(G) = 3$, então $\chi''_a(G) \leq 6$.

Esboço da demonstração:

- 1 Seja G simples com $\Delta(G) = 3$;
- 2 $\chi''_a(K_4) = 5$. Portanto, suponha $G \not\cong K_4$;
- 3 G não pode ser um ciclo, pois $\Delta(G) = 3$;
- 4 Pelo Teorema de Brooks, $\chi(G) \leq 3$;

Grafos com $\Delta(G) = 3$

Teorema (Wang, Chen, Hulgan)

Se G é um grafo simples com $\Delta(G) = 3$, então $\chi''_a(G) \leq 6$.

Esboço da demonstração:

- 1 Seja G simples com $\Delta(G) = 3$;
- 2 $\chi''_a(K_4) = 5$. Portanto, suponha $G \not\cong K_4$;
- 3 G não pode ser um ciclo, pois $\Delta(G) = 3$;
- 4 Pelo Teorema de Brooks, $\chi(G) \leq 3$;
- 5 Se $\chi(G) = 2$, então G é bipartido. Neste caso, $\chi''_a(G) \leq 5$;

Grafos com $\Delta(G) = 3$

Teorema (Wang, Chen, Hulgan)

Se G é um grafo simples com $\Delta(G) = 3$, então $\chi''_a(G) \leq 6$.

Esboço da demonstração:

- 1 Seja G simples com $\Delta(G) = 3$;
- 2 $\chi''_a(K_4) = 5$. Portanto, suponha $G \not\cong K_4$;
- 3 G não pode ser um ciclo, pois $\Delta(G) = 3$;
- 4 Pelo Teorema de Brooks, $\chi(G) \leq 3$;
- 5 Se $\chi(G) = 2$, então G é bipartido. Neste caso, $\chi''_a(G) \leq 5$;
- 6 Se $\chi(G) = 3$, então G é tripartido. Neste caso, $\chi''_a(G) \leq 6$.



Algumas considerações:

- 1 não conhecemos grafos com $\Delta(G) = 3$ que possuam $\chi''_a(G) > 5$;

Algumas considerações:

- 1 não conhecemos grafos com $\Delta(G) = 3$ que possuam $\chi''_a(G) > 5$;
- 2 grafos bipartidos com $\Delta(G) = 3$ possuem $\chi''_a(G) \leq 5$;

Algumas considerações:

- 1 não conhecemos grafos com $\Delta(G) = 3$ que possuam $\chi''_a(G) > 5$;
- 2 grafos bipartidos com $\Delta(G) = 3$ possuem $\chi''_a(G) \leq 5$;
- 3 J. Hulgan apresentou famílias de grafos 3-regulares que possuem $\chi''_a(G) = 5$ e propôs a seguinte conjectura:

Algumas considerações:

- 1 não conhecemos grafos com $\Delta(G) = 3$ que possuam $\chi''_a(G) > 5$;
- 2 grafos bipartidos com $\Delta(G) = 3$ possuem $\chi''_a(G) \leq 5$;
- 3 J. Hurler apresentou famílias de grafos 3-regulares que possuem $\chi''_a(G) = 5$ e propôs a seguinte conjectura:

Conjectura (Hurler)

Se G é um grafo simples com $\Delta(G) = 3$, então $\chi''_a(G) \leq 5$.

- grafos simples com $\Delta(G) = 3$ e sem vértices adjacentes de grau máximo.

- grafos simples com $\Delta(G) = 3$ e sem vértices adjacentes de grau máximo.

Teorema

Se G é um grafo simples com $\Delta(G) = 3$ e sem vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi''_a(G) = 4$.

- grafos simples com $\Delta(G) = 3$ e sem vértices adjacentes de grau máximo.

Teorema

Se G é um grafo simples com $\Delta(G) = 3$ e sem vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi''_a(G) = 4$.

- famílias de snarks:
 - snarks-flor;
 - snarks de Goldberg;
 - snarks de Blanusa generalizados; e
 - snarks de Loupekine LP_1 .

O engano de Tait e a origem dos snarks

Tait (1880)

Todo grafo plano, 3-regular e sem arestas de corte admite 4-coloração de arestas se e somente se admite 3-coloração de arestas.

O engano de Tait e a origem dos snarks

Tait (1880)

Todo grafo plano, 3-regular e sem arestas de corte admite 4-coloração de arestas se e somente se admite 3-coloração de arestas.

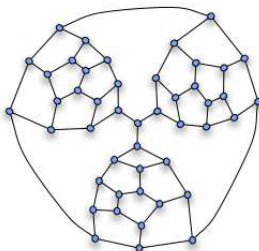
- Tait acreditava ter provado o Teorema das Quatro Cores pensando que todo grafo planar 3-regular e sem arestas de corte é hamiltoniano;
- Tutte mostrou um contraexemplo em 1946.

O engano de Tait e a origem dos snarks

Tait (1880)

Todo grafo plano, 3-regular e sem arestas de corte admite 4-coloração de arestas se e somente se admite 3-coloração de arestas.

- Tait acreditava ter provado o Teorema das Quatro Cores pensando que todo grafo planar 3-regular e sem arestas de corte é hamiltoniano;
- Tutte mostrou um contraexemplo em 1946.





Snarks são grafos 3-regulares , sem arestas de corte e que não admitem 3-coloração de arestas.

- Motivados pelo *Problema das Quatro Cores*.
- Nome Proposto por Gardner em 1976, inspirado pelo poema *The hunting of the snark* de Lewis Carrol.

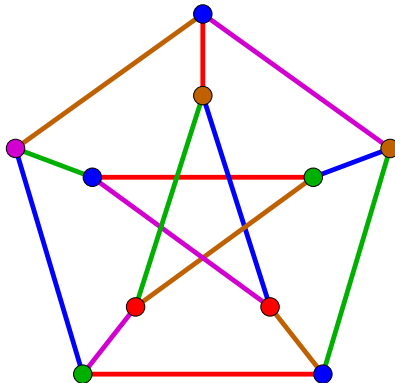


Descoberta dos snarks:

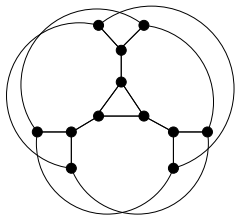
- 1898: Petersen
- 1946: Blanuša
- 1948: Descartes
- 1973: Szekeres
- 1975: Isaacs
Primeiras famílias infinitas
- 1976: Construção de Loupekine
- 1981: Construção de Goldberg
- 1996: Construção de Kochol



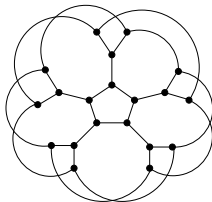
Grafo de Petersen - 1898



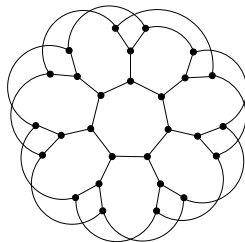
Família infinita de snarks descoberta em 1974, por Isaacs. Seus membros são os grafos F_i , com i ímpar e $i \geq 3$.



(c) Grafo F_3 .



(d) Grafo F_5 .

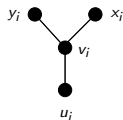


(e) Grafo F_7 .

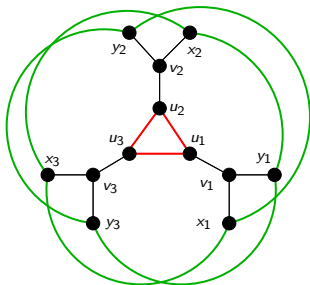
Figura: Os três primeiros membros da família Snark-Flor.

Snarks-flor – Construção

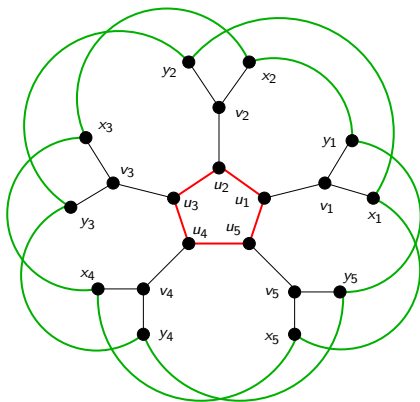
Seja B_i o grafo apresentado abaixo. Para cada i ímpar, $i \geq 3$, o snark-flor F_i é construído usando i cópias do grafo B_i e ligando essas cópias por dois ciclos $C_0 = u_1 u_2 u_3 \dots u_i$ e $C_1 = x_2 x_3 \dots x_i x_1 y_2 \dots y_i y_1 x_2$.



Grafo B_i



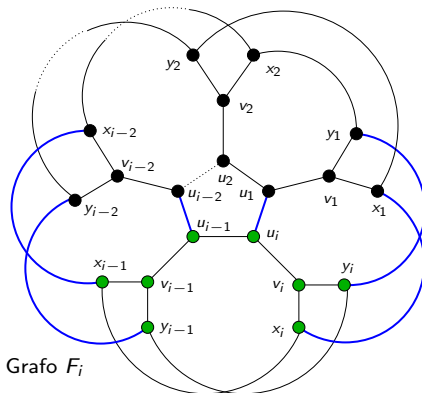
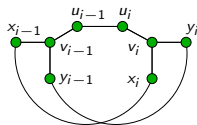
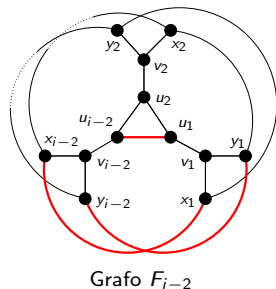
Grafo F_3



Grafo F_5

Snarks-flor – Construção Recursiva

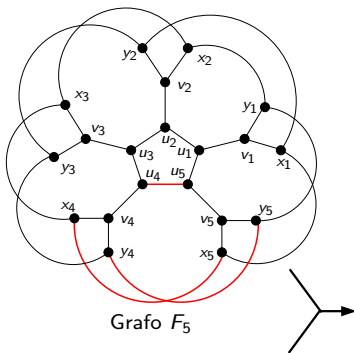
Para cada i ímpar e $i \geq 5$, o grafo F_i pode ser construído a partir do grafo F_{i-2} e de um grafo L_i , denominado *grafo de ligação*. Exemplo:



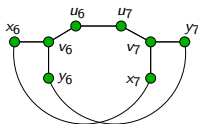
Conjunto E_{out} : arestas vermelhas no grafo F_{i-2} .

Conjunto E_i^{in} : arestas azuis no grafo F_i .

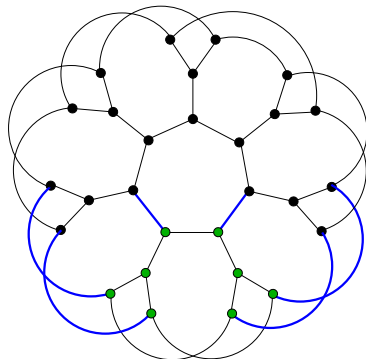
Snarks-flor – Construção Recursiva



Grafo F_5



Grafo de Ligação L_7



Grafo F_7

Conjunto E_{out} : arestas vermelhas no grafo F_5 .

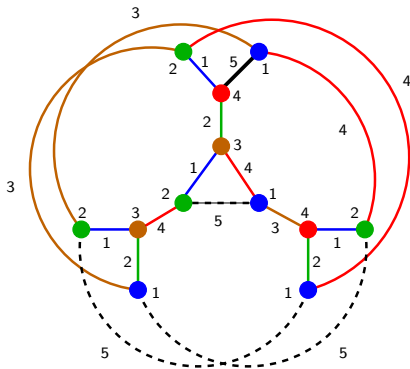
Conjunto E_7^{in} : arestas azuis no grafo F_7 .

Teorema

Todo snark-flor F_i possui $\chi''_a(F_i) = 5$.

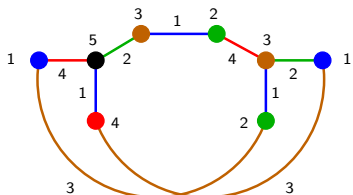
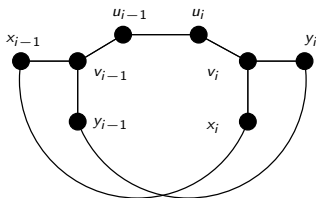
Demonstração:

- Como F_i é 3-regular, $\chi''_a(F_i) = 5$.
- Construímos uma 5-coloração total semiforte ϕ_i para F_i usando *indução* em i e a *construção recursiva* da família. A base da indução é a 5-coloração total semiforte do grafo F_3 exibida ao lado.



Resultado obtido

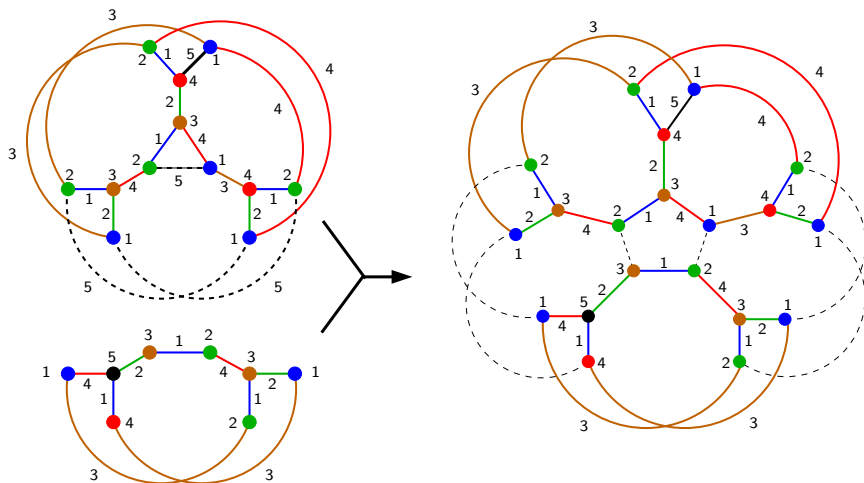
- Seja i ímpar e $i \geq 5$. Sabemos que F_i pode ser construído recursivamente a partir de F_{i-2} e L_i .
- Pela hipótese de indução, F_{i-2} possui uma 5-coloração total semiforte ϕ_{i-2} na qual as arestas de E_{out} possuem a cor 5.
- Uma 5-coloração total semiforte π do grafo de Ligação L_i é exibida a seguir.



5-coloração total semiforte π do grafo de ligação L_i

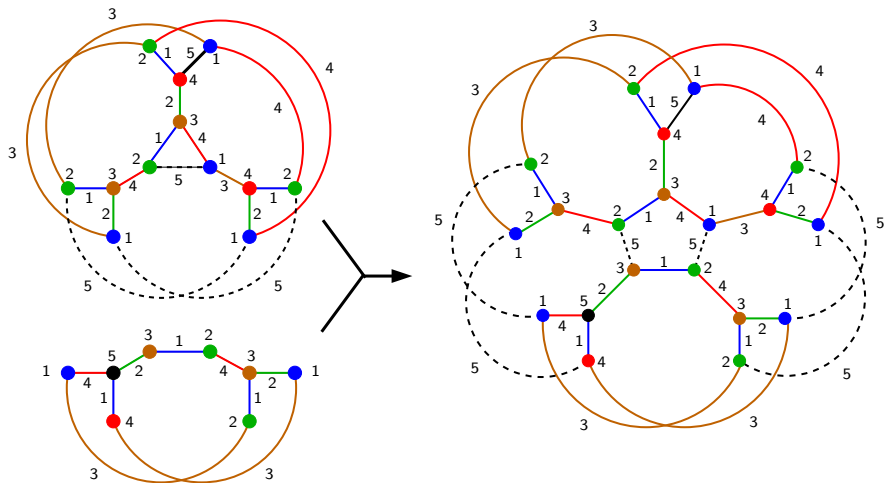
Resultado obtido

- Atribuímos aos elementos de $V(F_i) \cup E(F_i) \setminus E_i^{in}$ as mesmas cores que eles possuem em F_{i-2} ou L_i .



Resultado obtido

- Ao final, as arestas de E_i^{in} recebem a cor 5.



Snarks de Goldberg

Teorema

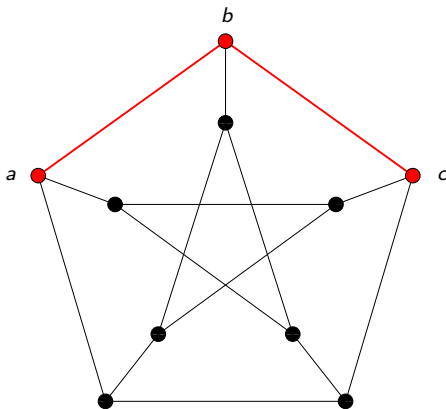
Se G é um snark de Goldberg, então $\chi''_a(G) = 5$.

Snarks de Blanuša generalizados

Teorema

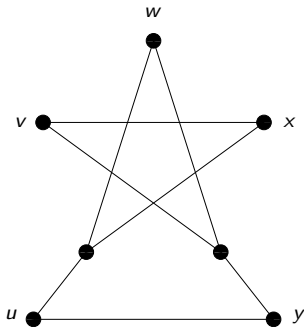
Se G é um snark de Blanuša generalizado, então $\chi''_a(G) = 5$.

Bloco Básico



Obtido a partir do Grafo de Petersen

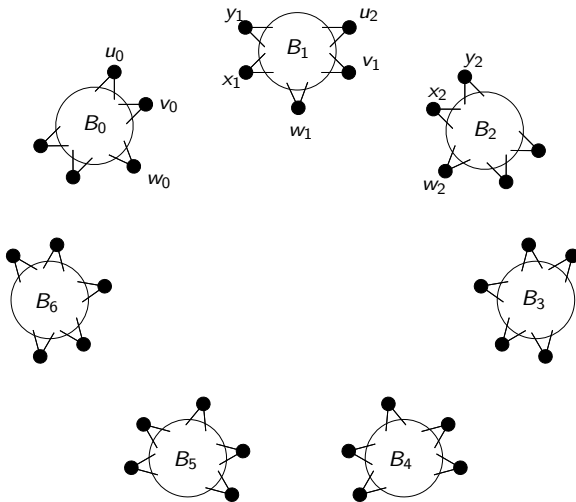
Bloco Básico



Obtido a partir do **Grafo de Petersen**

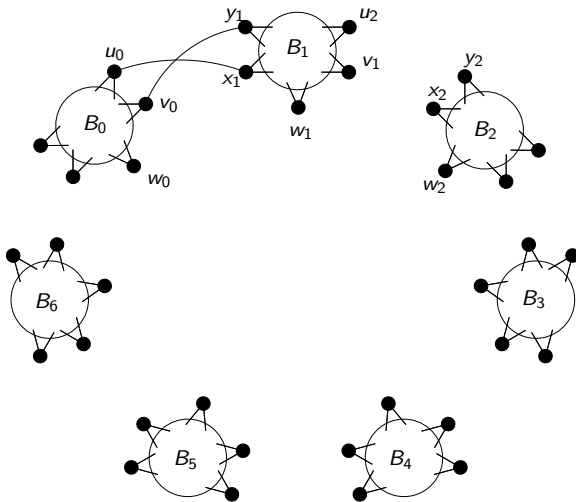
Snarks de Loupequine LP_1 - Construção

Número k de blocos em ordem cíclica ($k \geq 3$)



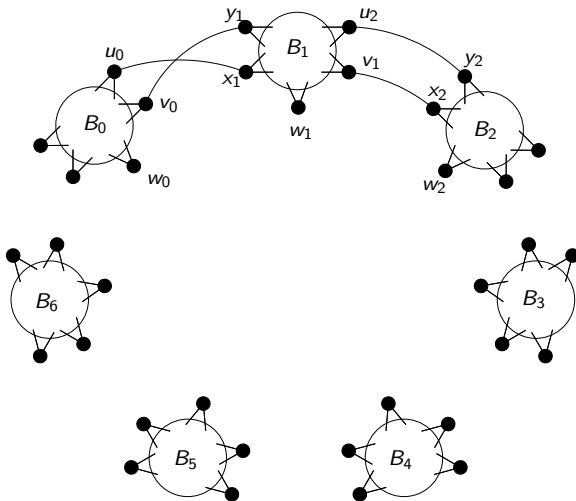
Snarks de Loupequine LP_1 - Construção

Arestas entre blocos: conecte u_i, v_i a x_{i+1}, y_{i+1}



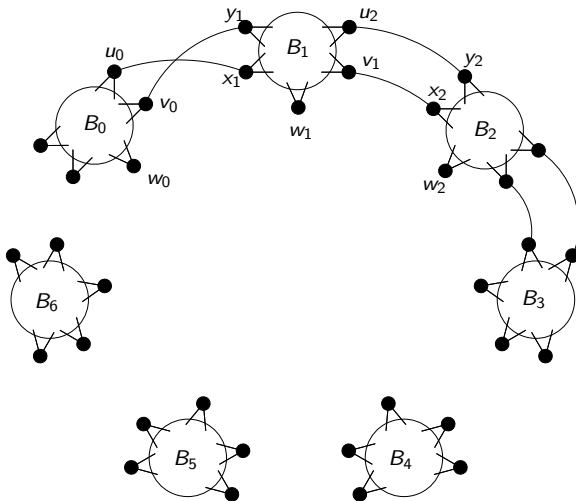
Snarks de Loupequine LP_1 - Construção

Arestas entre blocos: conecte u_i, v_i a x_{i+1}, y_{i+1}

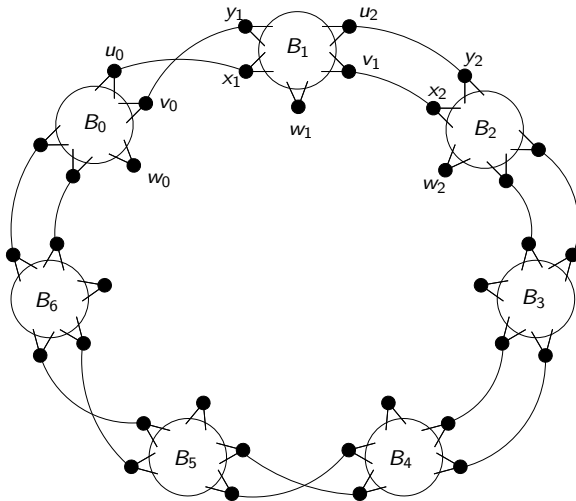


Snarks de Loupequine LP_1 - Construção

Arestas entre blocos: conecte u_i, v_i a x_{i+1}, y_{i+1}

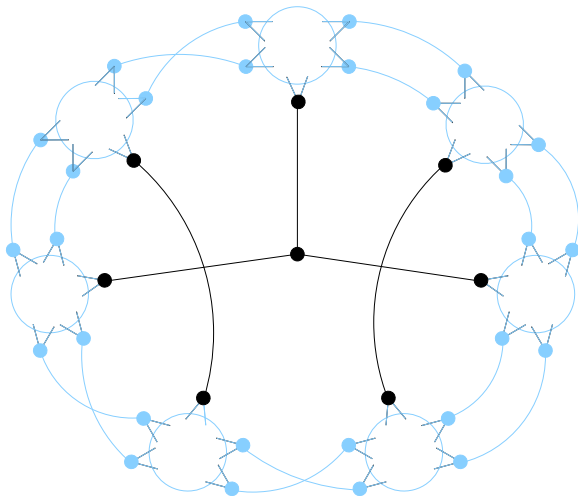


Subgrafo de blocos



Snarks de Loupekin LP_1 - Construção

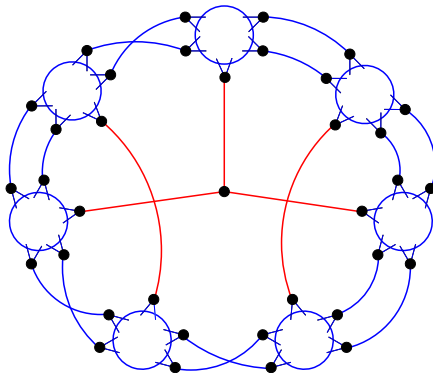
Subgrafo Central: cada componente conexa é um grafo P_3 ou S_3



Snarks de Loupekin LP_1 - Construção

Um snark LP_1 é formado pela união de dois subgrafos aresta-disjuntos:

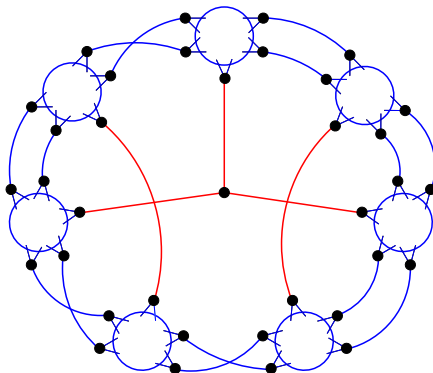
- Subgrafo central G_C
- Subgrafo de blocos G_B



Snarks de Loupekin LP_1 - Construção

Um snark LP_1 é formado pela união de dois subgrafos aresta-disjuntos:

- Subgrafo central G_C
- Subgrafo de blocos G_B

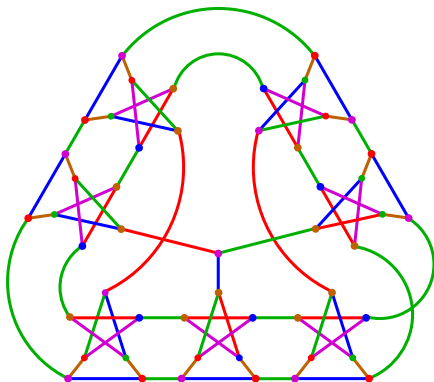


Algumas restrições para k par:

- Com 4 blocos não é possível obter um snark
- Para $k \geq 6$, é necessário adicionar uma restrição ao subgrafo G_C de modo a obter um snark.

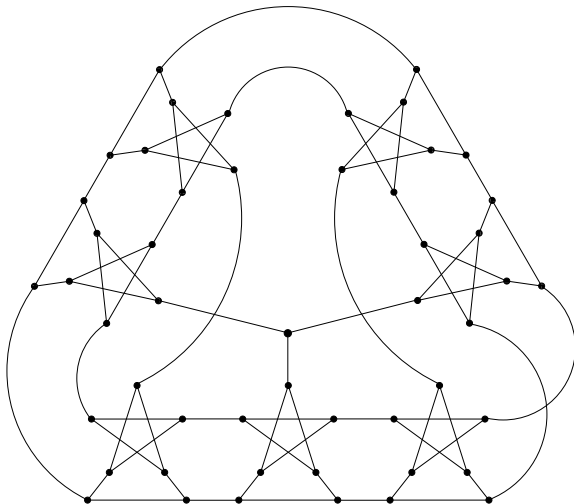
Teorema

Se G é um snark LP_1 , então $\chi''_a(G) = 5$.



Decomposição de um snark LP_1

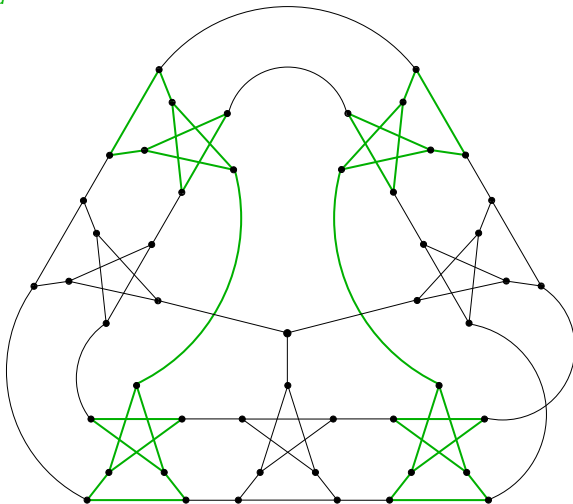
Decomposição de um snark LP_1 , G , em subgrafos disjuntos nas arestas



Decomposição de um snark LP_1

Decomposição de um snark LP_1 , G , em subgrafos disjuntos nas arestas

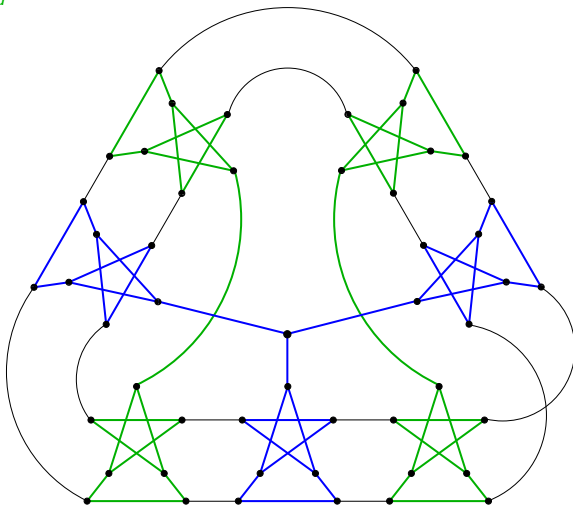
- Gadgets duplos G_d



Decomposição de um snark LP_1

Decomposição de um snark LP_1 , G , em subgrafos disjuntos nas arestas

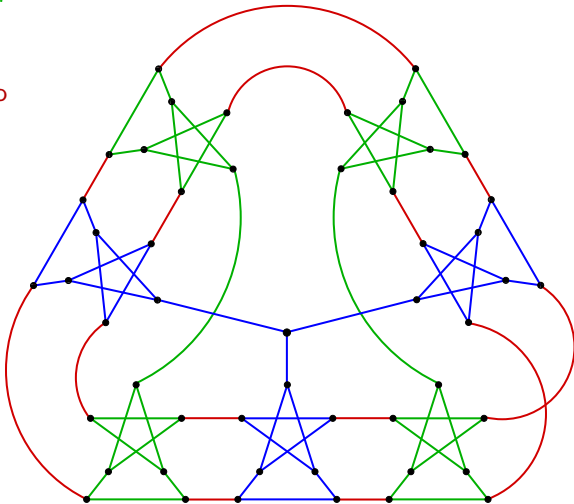
- Gadgets duplos G_d
- Gadgets triplos G_t



Decomposição de um snark LP_1

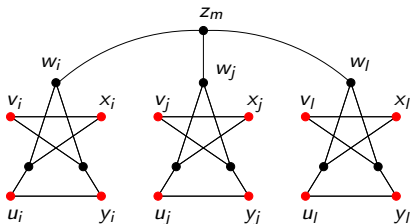
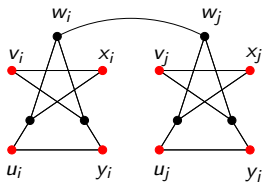
Decomposição de um snark LP_1 , G , em subgrafos disjuntos nas arestas

- Gadgets duplos G_d
- Gadgets triplos G_t
- Arestas de Ligação



Decomposição de um snark LP_1

Cada gadget é isomorfo a um destes grafos:

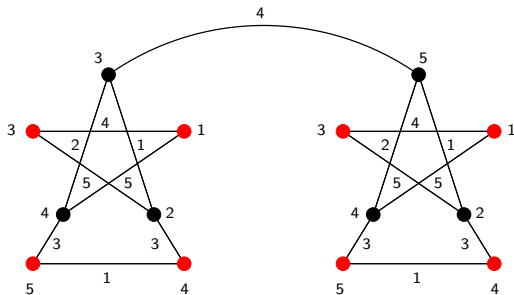


Chamamos de **vértices de borda**, os vértices u, v, x, y

Demonstração – snark LP_1

Construímos uma 5-coloração total semiforte dos gadgets

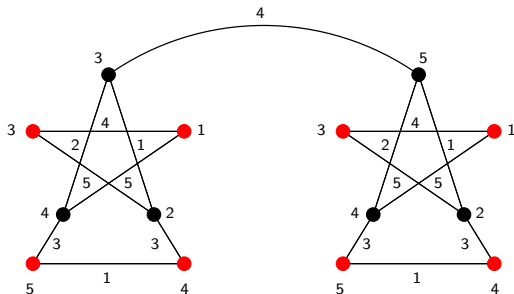
- A cor 2 não ocorre nos **vértices de borda**;



Demonstração – snark LP_1

Construímos uma 5-coloração total semiforte dos gadgets

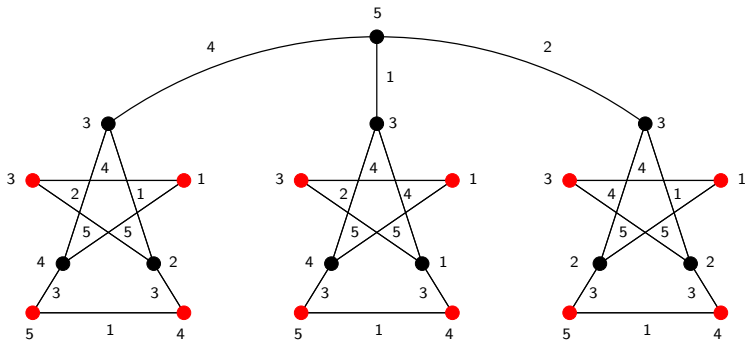
- A cor 2 não ocorre nos **vértices de borda**;
- As cores dos **vértices de borda** possuem a seguinte invariante:
 $\phi(x) = 1, \phi(y) = 4, \phi(u) = 5$ e $\phi(v) = 3$.

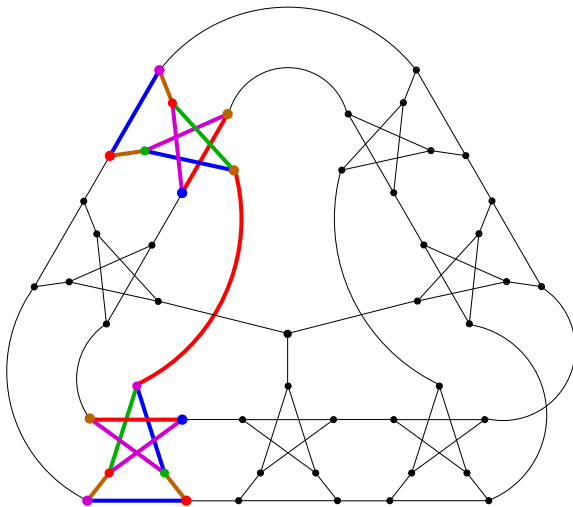


Demonstração – snark LP_1

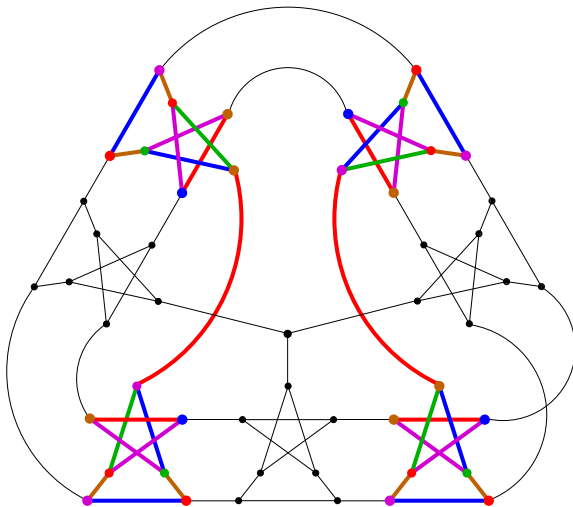
Construímos uma 5-coloração total semiforte dos gadgets

- A cor 2 não ocorre nos **vértices de borda**;
- As cores dos **vértices de borda** possuem a seguinte invariante:
 $\phi(x) = 1, \phi(y) = 4, \phi(u) = 5$ e $\phi(v) = 3$.

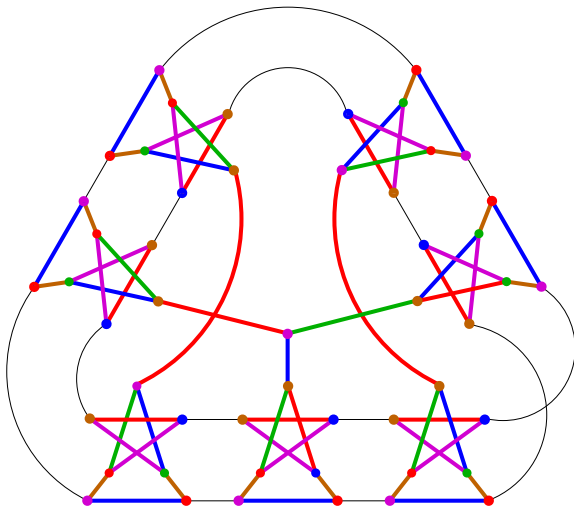




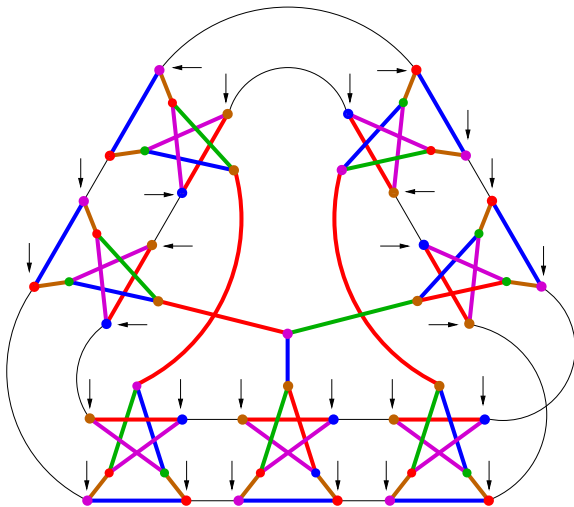
Gadgets duplos recebem 5-coloração total semiforte π



Gadgets duplos recebem 5-coloração total semiforte π

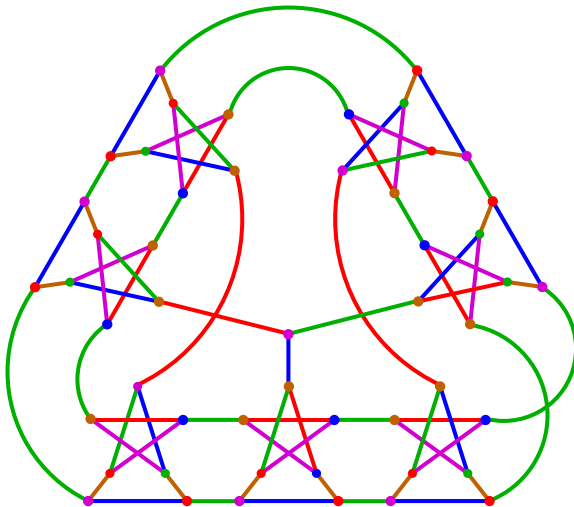


Gadgets triplos recebem 5-coloração total semiforte π



Vértices de borda: a cor 2 não ocorre

Demonstração – snark LP_1



Todas as arestas de ligação recebem a cor 2

Grafos equipartidos completos

Grafos equipartidos completos

Definição

Um **grafo equipartido completo**, $K_{r(n)}$, é um grafo cujo conjunto de vértices pode ser particionado em r conjuntos independentes de cardinalidade n , de modo que quaisquer dois vértices pertencentes a partes distintas sejam ligados por uma aresta.

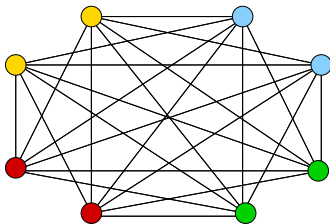


Figura: Grafo equipartido completo $K_{4(2)}$.

Teorema

Seja $G := K_{r(n)}$, $r \geq 2$ e $n \geq 2$. Então,

- $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$ se G possui ordem par, ou
- $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 3$ se G possui ordem ímpar.

Teorema

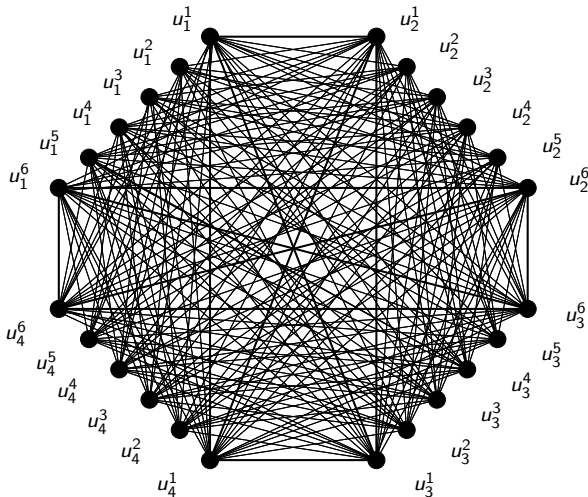
Seja $G := K_{r(n)}$, $r \geq 2$ e $n \geq 2$. Então,

- $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$ se G possui ordem par, ou
- $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 3$ se G possui ordem ímpar.

- Demonstração em quatro casos:
 - r par e n par.
 - r ímpar e n par.
 - r par e n ímpar.
 - r ímpar e n ímpar.

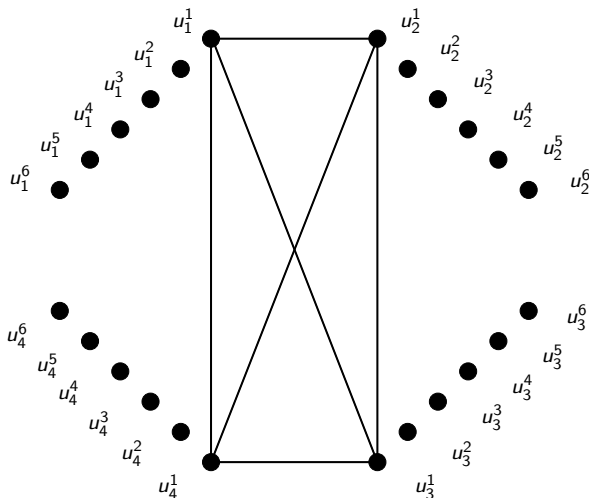
Decomposição canônica do $K_{r(n)}$

Exemplo: $K_{4(6)}$, $r = 4$ e $n = 6$. Rotule os vértices: u_i^k .



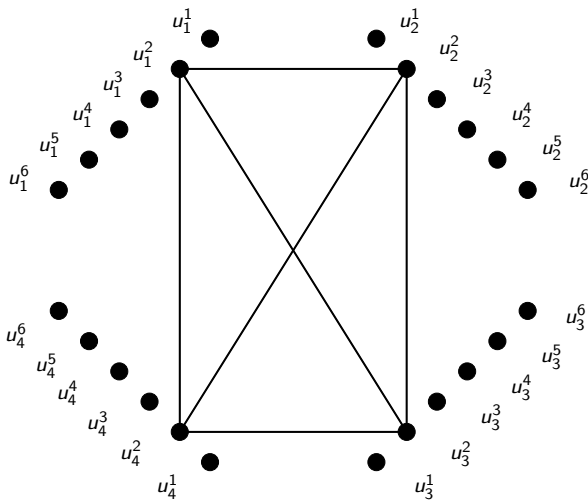
Decomposição canônica do $K_{r(n)}$

$K_{r(n)}$ possui n cópias disjuntas do K_r . Subgrafo K_4^1



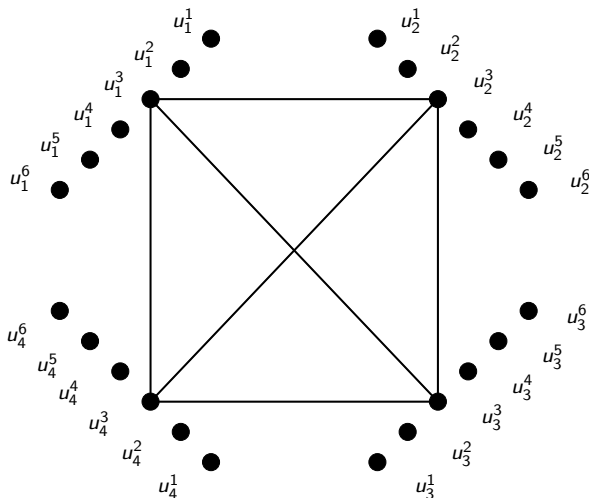
Decomposição canônica do $K_{r(n)}$

$K_{r(n)}$ possui n cópias disjuntas do K_r . Subgrafo K_4^2



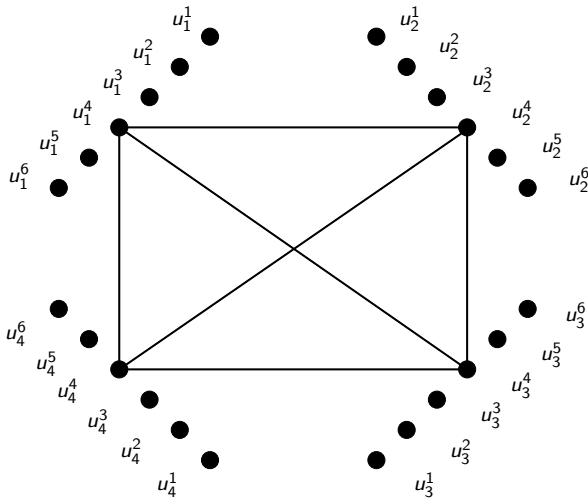
Decomposição canônica do $K_{r(n)}$

$K_{r(n)}$ possui n cópias disjuntas do K_r . Subgrafo K_4^3



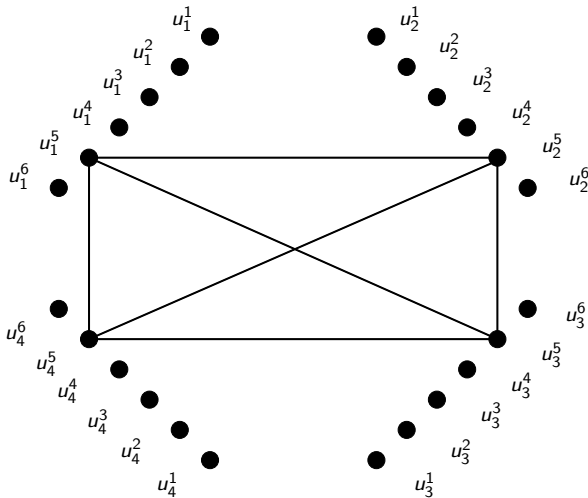
Decomposição canônica do $K_{r(n)}$

$K_{r(n)}$ possui n cópias disjuntas do K_r . Subgrafo K_4^4



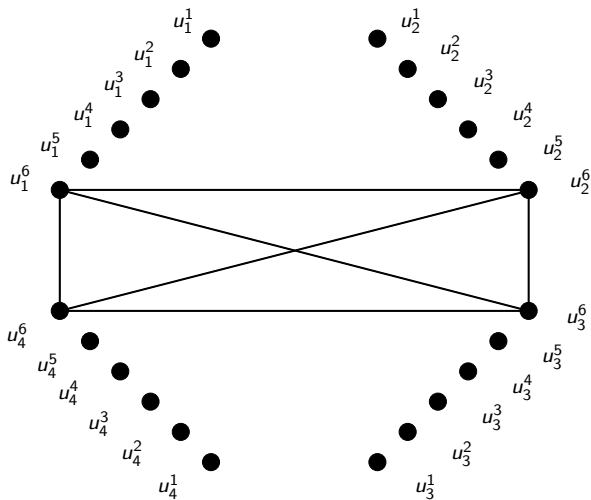
Decomposição canônica do $K_{r(n)}$

$K_{r(n)}$ possui n cópias disjuntas do K_r . Subgrafo K_4^5



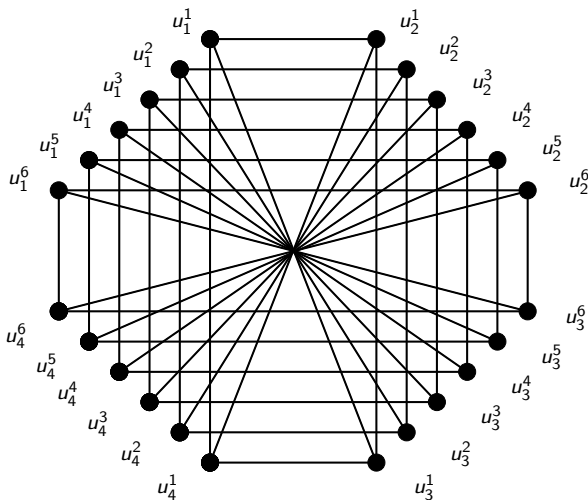
Decomposição canônica do $K_{r(n)}$

$K_{r(n)}$ possui n cópias disjuntas do K_r . Subgrafo K_4^6



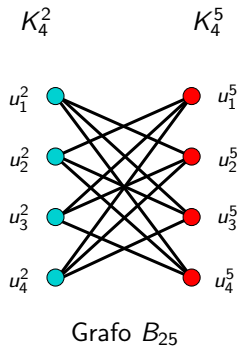
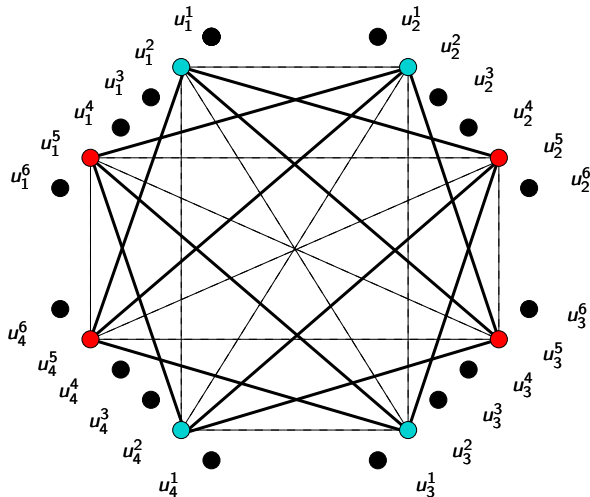
Decomposição canônica do $K_{r(n)}$

Seis subgrafos disjuntos isomorfos ao grafo completo K_4



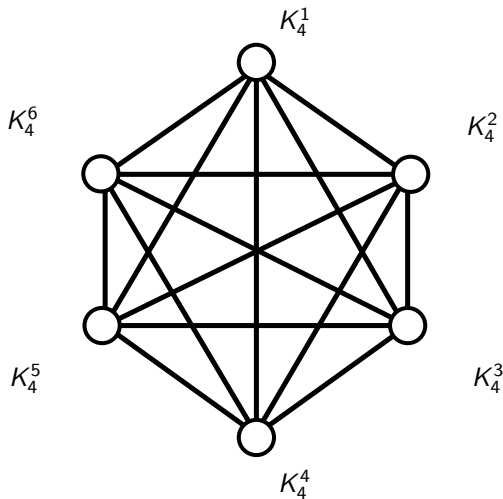
Decomposição canônica do $K_{r(n)}$

Arestas que ligam vértices do K_r^i a vértices do K_r^j ($i \neq j$) induzem um grafo bipartido $(r-1)$ -regular B_{ij}



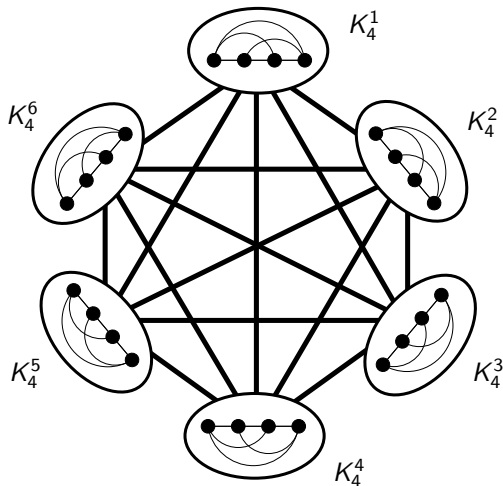
Grafo representante do $K_{r(n)}$

O grafo representante do $K_{r(n)}$ é isomorfo ao K_n



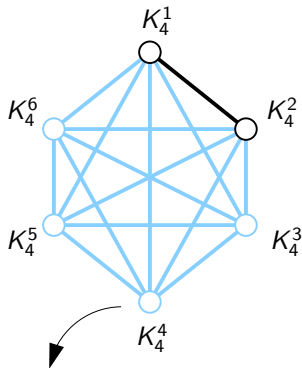
Grafo representante do $K_{r(n)}$

Grafo representante do $K_{4(6)}$



Grafo representante do $K_{r(n)}$

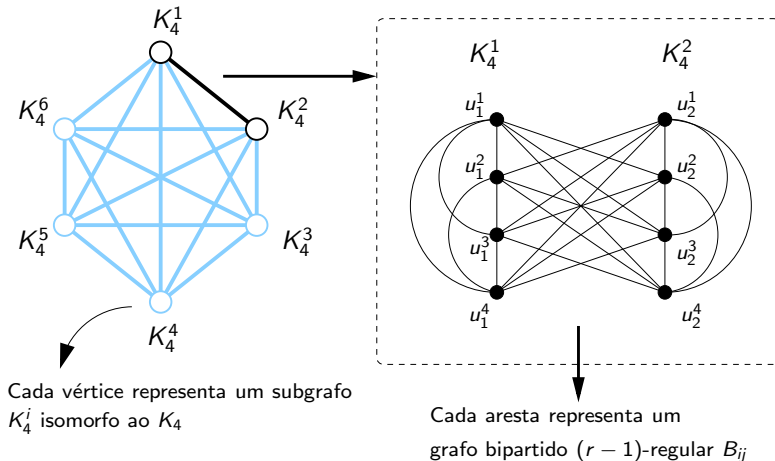
Grafo representante do $K_{4(6)}$



Cada vértice representa um subgrafo K_4^i isomorfo ao K_4

Grafo representante do $K_{r(n)}$

Grafo representante do $K_{4(6)}$



Teorema

Seja $G := K_{r(n)}$, $r \geq 2$ e $n \geq 2$. Então,

- $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$ se G possui ordem par, ou
- $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 3$ se G possui ordem ímpar.

Caso 1 - n par e r par.

Esboço

Teorema

Seja $G := K_{r(n)}$, $r \geq 2$ e $n \geq 2$. Então,

- $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$ se G possui ordem par, ou
- $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 3$ se G possui ordem ímpar.

Caso 1 - n par e r par.

Esboço

- $\chi''_a(G) \geq \Delta(G) + 2$.

Teorema

Seja $G := K_{r(n)}$, $r \geq 2$ e $n \geq 2$. Então,

- $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$ se G possui ordem par, ou
- $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 3$ se G possui ordem ímpar.

Caso 1 - n par e r par.

Esboço

- $\chi_a''(G) \geq \Delta(G) + 2$.
- Construímos uma coloração total semiforte do $K_{r(n)}$ com $\Delta(G) + 2$ cores.

Teorema

Seja $G := K_{r(n)}$, $r \geq 2$ e $n \geq 2$. Então,

- $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$ se G possui ordem par, ou
- $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 3$ se G possui ordem ímpar.

Caso 1 - n par e r par.

Esboço

- $\chi_a''(G) \geq \Delta(G) + 2$.
- Construímos uma coloração total semiforte do $K_{r(n)}$ com $\Delta(G) + 2$ cores.
 - **Como?** - Usando decomposição canônica do $K_{r(n)}$.

Teorema

Seja $G := K_{r(n)}$, $r \geq 2$ e $n \geq 2$. Então,

- $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$ se G possui ordem par, ou
- $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 3$ se G possui ordem ímpar.

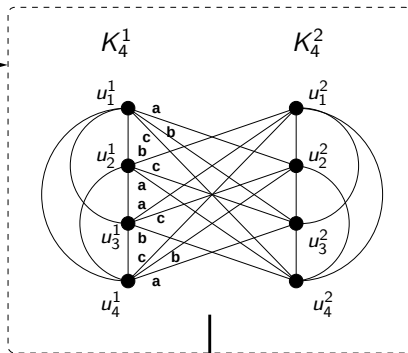
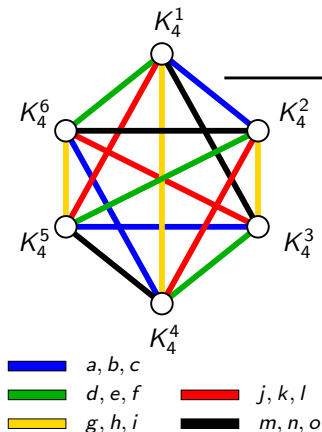
Caso 1 - n par e r par.

Esboço

- $\chi_a''(G) \geq \Delta(G) + 2$.
- Construímos uma coloração total semiforte do $K_{r(n)}$ com $\Delta(G) + 2$ cores.
 - **Como?** - Usando decomposição canônica do $K_{r(n)}$.
- Ilustração da prova usando o $K_{4(6)}$.

Ilustração da prova (caso $r = 4, n = 6$)

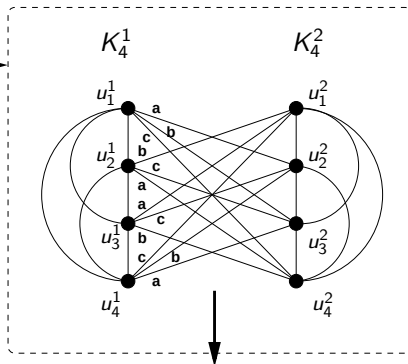
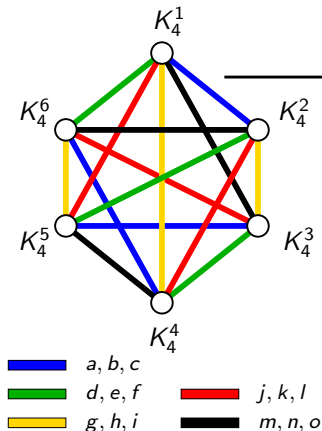
O grafo representante do $K_{r(n)}$ possui $n - 1$ emparelhamentos perfeitos



Cada grafo bipartido B_{ij} pode ter suas arestas coloridas com $(r - 1)$ cores

Ilustração da prova (caso $r = 4, n = 6$)

Coloração de arestas dos grafos bipartidos

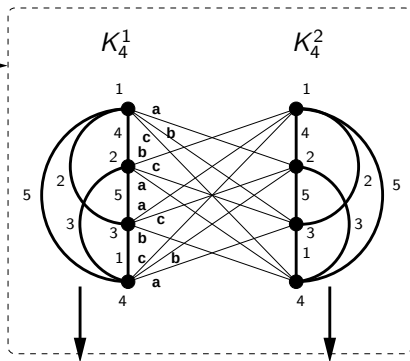
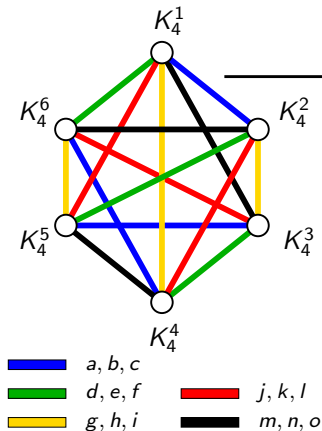


Cada grafo bipartido B_{ij} pode ter suas arestas coloridas com $(r - 1)$ cores

$$\text{Total de cores dos grafos bipartidos} = (r - 1) * (n - 1)$$

Ilustração da prova (caso $r = 4, n = 6$)

Coloração total semiforte dos grafos completos K_r^i

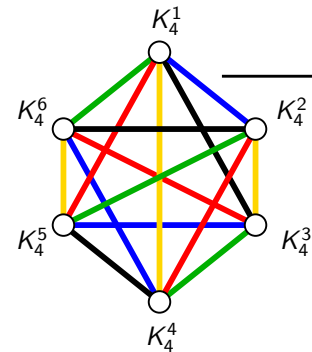


Como $K_r^i \cong K_r$, cada subgrafo K_r^i possui uma coloração total semiforte com $r + 1$ cores

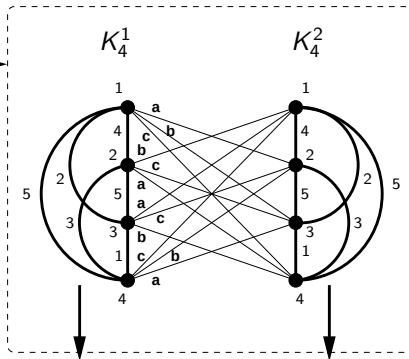
Cada subgrafo K_4^i possui uma 5-coloração total semiforte

Ilustração da prova (caso $r = 4, n = 6$)

Coloração total semiforte do $K_{r(n)}$



- a, b, c
- d, e, f
- g, h, i
- j, k, l
- m, n, o



Como $K_r^i \cong K_r$, cada subgrafo K_r^i possui uma coloração total semiforte com $r + 1$ cores

$$\text{Total de cores} = (n - 1) * (r - 1) + (r + 1) = n * (r - 1) + 2 = \Delta(K_{r(n)}) + 2$$

Teorema

Seja $G := K_{r(n)}$, $r \geq 2$ e $n \geq 2$. Então,

- $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$ se G possui ordem par, ou
- $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 3$ se G possui ordem ímpar.

Caso 4 - n ímpar e r ímpar.

Esboço

Teorema

Seja $G := K_{r(n)}$, $r \geq 2$ e $n \geq 2$. Então,

- $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$ se G possui ordem par, ou
- $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 3$ se G possui ordem ímpar.

Caso 4 - n ímpar e r ímpar.

Esboço

- Construímos uma coloração total semiforte do $K_{r(n)}$ com $\Delta(G) + 3$ cores.
 - **Como?** - Usando decomposição canônica do $K_{r(n)}$.
- Ilustração da prova usando o $K_{3(5)}$.

Grafo $K_{3(5)}$

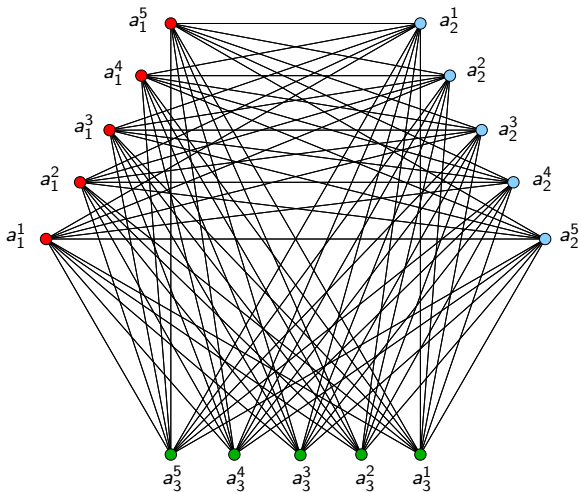
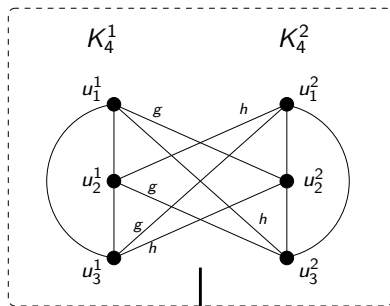
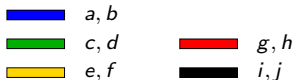
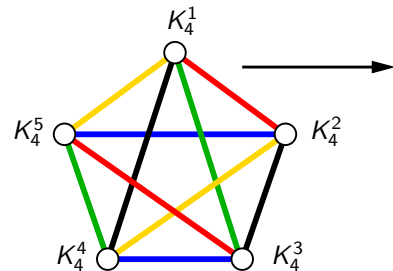


Ilustração da prova (caso $r = 3, n = 5$)

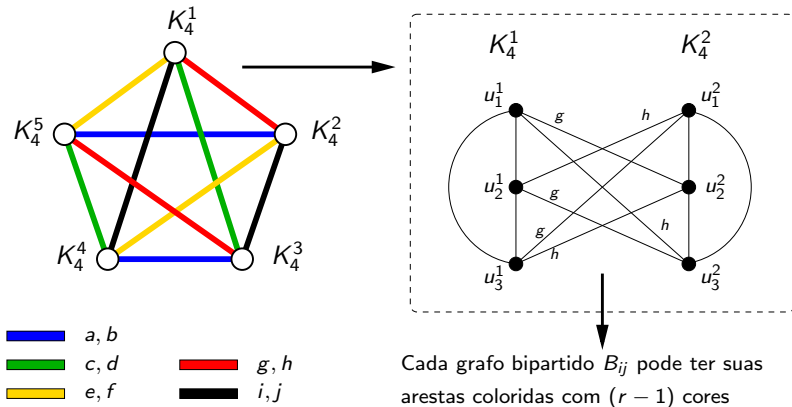
O grafo representante do $K_{r(n)}$ possui n emparelhamentos quase-perfeitos



Cada grafo bipartido B_{ij} pode ter suas arestas coloridas com $(r - 1)$ cores

Ilustração da prova (caso $r = 3$, $n = 5$)

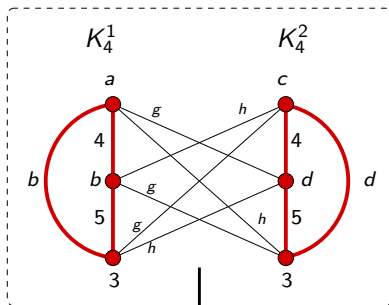
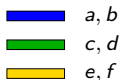
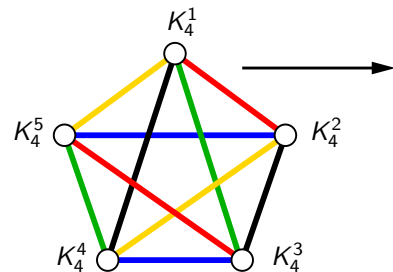
O grafo representante do $K_{r(n)}$ possui n emparelhamentos quase-perfeitos



Total de cores dos bipartidos = $(r - 1) \times n = 2 \times 5 = 10$.

Ilustração da prova (caso $r = 3, n = 5$)

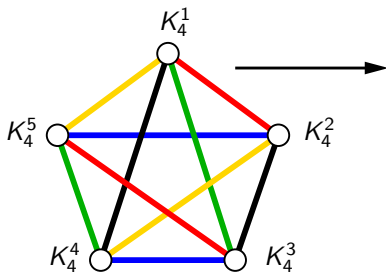
Coloração total semiforte dos grafos K_3^i



Como $K_3^i \cong K_3$, cada subgrafo K_3^i possui uma coloração total semiforte com 5 cores

Ilustração da prova (caso $r = 3, n = 5$)

Coloração total semiforte dos grafos K_3^i



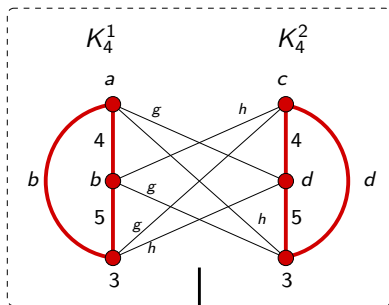
— a, b

— c, d

— e, f

— g, h

— i, j

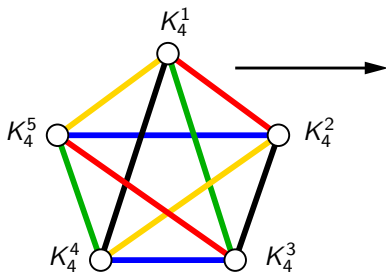


Como $K_3^i \cong K_3$, cada subgrafo K_3^i possui uma coloração total semiforte com 5 cores

Observe que cores dos grafos B_{ij} são reusadas na coloração total semiforte dos grafos K_3^i .

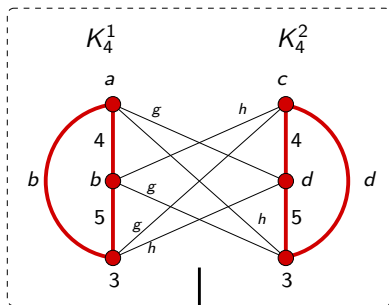
Ilustração da prova (caso $r = 3, n = 5$)

Coloração total semiforte dos grafos K_3^i



Blue: a, b
Green: c, d
Yellow: e, f

Red: g, h
Black: i, j



Como $K_3^i \cong K_3$, cada subgrafo K_3^i possui uma coloração total semiforte com 5 cores

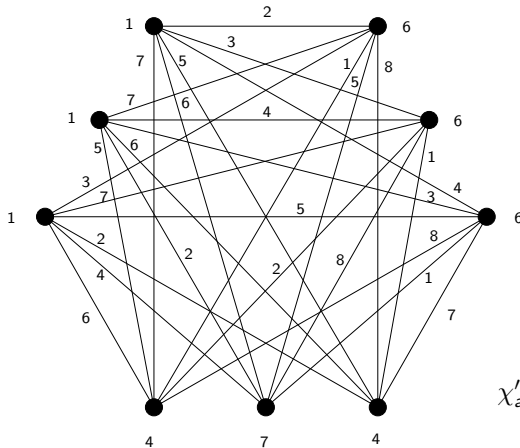
$$\text{Total de cores} = n \times (r - 1) + 3 = \Delta(K_{r(n)}) + 3.$$

Conjetura

Conjetura

Se G é um grafo equipartido completo de ordem ímpar, então

$$\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2.$$



$$\chi_a''(K_{3(3)}) = 8$$

Conclusões

- A Conjetura da Coloração Total Semiforte é válida para todas as famílias consideradas neste trabalho;

- A Conjetura da Coloração Total Semiforte é válida para todas as famílias consideradas neste trabalho;
- Os resultados obtidos para as famílias de grafos simples G com $\Delta(G) = 3$ fortalecem a conjectura de que $\chi''_a(G) \leq 5$;

- A Conjetura da Coloração Total Semiforte é válida para todas as famílias consideradas neste trabalho;
- Os resultados obtidos para as famílias de grafos simples G com $\Delta(G) = 3$ fortalecem a conjectura de que $\chi''_a(G) \leq 5$;
- Determinar $\chi''_a(G)$ para grafos arbitrários é difícil, dado que não conseguimos sequer afirmar se $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$;

- A Conjetura da Coloração Total Semiforte é válida para todas as famílias consideradas neste trabalho;
- Os resultados obtidos para as famílias de grafos simples G com $\Delta(G) = 3$ fortalecem a conjectura de que $\chi''_a(G) \leq 5$;
- Determinar $\chi''_a(G)$ para grafos arbitrários é difícil, dado que não conseguimos sequer afirmar se $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$;
- Técnicas utilizadas aqui são difíceis de serem adaptadas para grafos arbitrários.

Grafos bipartidos sem vértices adjacentes de grau máximo

Conjetura

Todo grafo bipartido G sem vértices adjacentes de grau máximo possui
 $\chi''_a(G) = \chi''(G) = \Delta(G) + 1$

Grafos bipartidos sem vértices adjacentes de grau máximo

Conjetura

Todo grafo bipartido G sem vértices adjacentes de grau máximo possui
 $\chi''_a(G) = \chi''(G) = \Delta(G) + 1$

Verdadeira para:

- **árvores** sem vértices adjacentes de grau máximo;

Grafos bipartidos sem vértices adjacentes de grau máximo

Conjetura

Todo grafo bipartido G sem vértices adjacentes de grau máximo possui $\chi''_a(G) = \chi''(G) = \Delta(G) + 1$

Verdadeira para:

- **árvores** sem vértices adjacentes de grau máximo;
- **bipartidos completos** sem vértices adjacentes de grau máximo;

Grafos bipartidos sem vértices adjacentes de grau máximo

Conjetura

Todo grafo bipartido G sem vértices adjacentes de grau máximo possui $\chi'_a(G) = \chi''(G) = \Delta(G) + 1$

Verdadeira para:

- **árvores** sem vértices adjacentes de grau máximo;
- **bipartidos completos** sem vértices adjacentes de grau máximo;
- **grafos simples bipartidos com $\Delta(G) = 3$** sem vértices adjacentes de grau máximo;

Problema

Investigação de condições necessárias e/ou suficientes para que um grafo simples G não admita uma coloração total semiforte com $\Delta(G) + 2$ cores.

Problema

Investigação de condições necessárias e/ou suficientes para que um grafo simples G não admita uma coloração total semiforte com $\Delta(G) + 2$ cores.

Poucas famílias com $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 3$ são conhecidas:

- K_{2n+1} , $n \geq 1$.

Problema

Investigação de condições necessárias e/ou suficientes para que um grafo simples G não admita uma coloração total semiforte com $\Delta(G) + 2$ cores.

Poucas famílias com $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 3$ são conhecidas:

- K_{2n+1} , $n \geq 1$.
- $K_{2n+1} \setminus E(P_3)$, para $n \geq 7$.

Problema

Investigação de condições necessárias e/ou suficientes para que um grafo simples G não admita uma coloração total semiforte com $\Delta(G) + 2$ cores.

Poucas famílias com $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 3$ são conhecidas:

- K_{2n+1} , $n \geq 1$.
- $K_{2n+1} \setminus E(P_3)$, para $n \geq 7$.
- $K_{2n+1} \setminus E(K_3)$, para $n \geq 9$.

Problema

Investigação de condições necessárias e/ou suficientes para que um grafo simples G não admita uma coloração total semiforte com $\Delta(G) + 2$ cores.

Poucas famílias com $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 3$ são conhecidas:

- K_{2n+1} , $n \geq 1$.
- $K_{2n+1} \setminus E(P_3)$, para $n \geq 7$.
- $K_{2n+1} \setminus E(K_3)$, para $n \geq 9$.
- $sP_3 \vee K_n$, para $s \geq 2$ e par, t ímpar e $t \geq 9s^2 + 2s - 1$.

Agradecimentos

CNPq

FAPESP

Instituto de Computação - UNICAMP

Obrigado!

- [1] M. Chen and X. Guo.
Adjacent vertex-distinguishing edge and total chromatic numbers of hypercubes.
Information Processing Letters, 109:599–602, 2009.
- [2] X. Chen.
Adjacent-vertex-distinguishing total chromatic numbers on $K_{2n+1} - E(P_3)$.
International Journal of Pure and Applied Mathematics, 13(1):19–27, 2004.
- [3] X. Chen.
On the adjacent vertex distinguishing total coloring numbers of graphs with $\Delta = 3$.
Discrete Mathematics, 308:4003–4007, 2008.
- [4] X. Chen and Z. Zhang.
Avdtc numbers of generalized Halin graphs with maximum degree at least 6.
Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 24(1):55–58, 2008.
- [5] D. Huang and W. Wang.
Adjacent vertex distinguishing total coloring of planar graphs with large maximum degree.
Scientia Sinica Mathematica, 42:151–164, 2012.

- [6] D. Huang, W. Wang, and C. Yan.
A note on the adjacent vertex distinguishing total chromatic number of graphs.
Discrete Mathematics, 312:3544–3546, 2012.
- [7] J. Hulan.
Concise proofs for adjacent vertex-distinguishing total colourings.
Discrete Mathematics, 309:2548–2550, 2009.
- [8] J. Hulan.
Graph coloring with constraints.
PhD thesis, Mathematical Sciences, University of Memphis, May 2010.
- [9] V. Pedrotti and C. P. de Mello.
Adjacent-vertex-distinguishing total colouring of indifference graphs.
Matemática Contemporânea, 39:101–110, 2010.
- [10] H. Wang.
On the adjacent vertex-distinguishing total chromatic number of the graphs with $\Delta(G) = 3$.
Journal of Combinatorial Optimization, 14:87–109, 2007.

- [11] W. Wang and D. Huang.
The adjacent vertex distinguishing total coloring of planar graphs.
Journal of Combinatorial Optimization, pages 1–18, 2012.
- [12] Y. Wang and W. Wang.
Adjacent vertex distinguishing total colourings of outerplanar graphs.
Journal of Combinatorial Optimization, 19:123–133, 2010.
- [13] Z. Zhang, C. Xiang, L. Jingwen, Y. Bing, L. Xinzhong, and W. Jianfang.
On adjacent-vertex-distinguishing total colouring of graphs.
Science in China Series A: Mathematics, 48(3):289–299, 2005.