

Rotulações graciosas e rotulações semifortes em grafos

Atílio Gomes Luiz

21 de maio de 2018

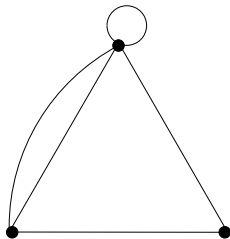
Orientadora: Christiane Neme Campos

Instituto de Computação

Universidade Estadual de Campinas

1. Definições
2. Conjetura das Árvores Graciosas
3. Rotulações semifortes
4. Conclusões

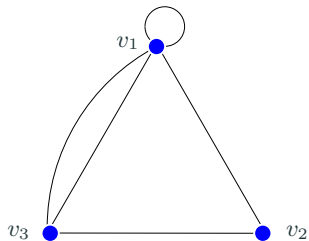




Grafo $G = (V(G), E(G))$

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

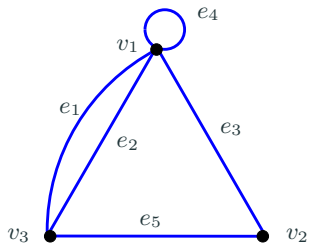


Grafo $G = (V(G), E(G))$

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

Grafo

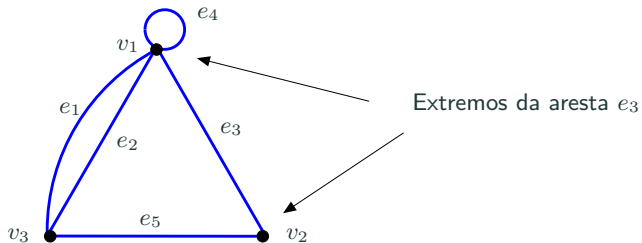


Grafo $G = (V(G), E(G))$

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

Grafo

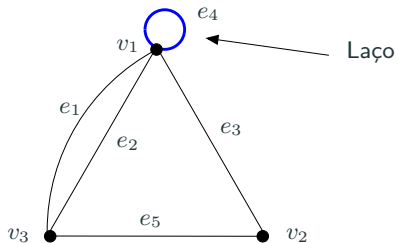


Grafo $G = (V(G), E(G))$

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

Grafo

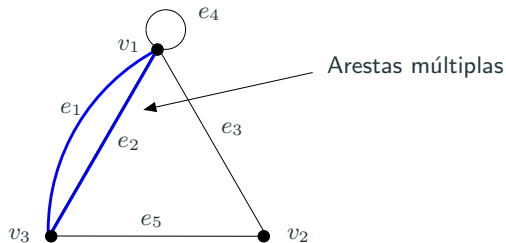


Grafo $G = (V(G), E(G))$

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

Grafo

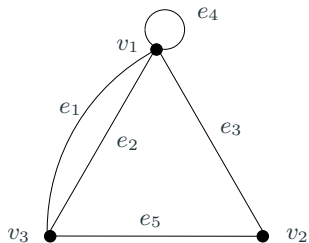


Grafo $G = (V(G), E(G))$

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

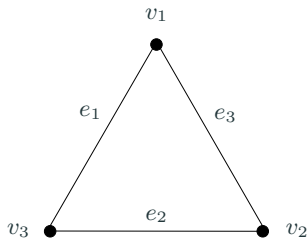
Grafo



Grafo $G = (V(G), E(G))$

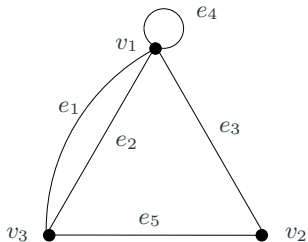
$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$



Grafo Simples $G = (V(G), E(G))$

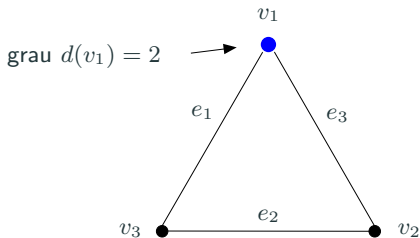
Grafo



Grafo $G = (V(G), E(G))$

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

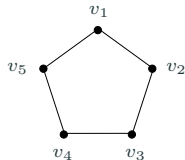


Grafo Simples $G = (V(G), E(G))$

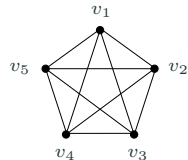
Caminhos, Ciclos e Grafos completos



Caminho P_5



Ciclo C_5

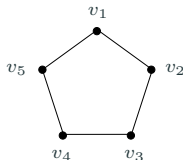


Grafo Completo K_5

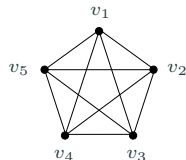
Caminhos, Ciclos e Grafos completos



Caminho P_5



Ciclo C_5



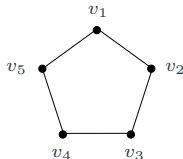
Grafo Completo K_5

- G é um **grafo conexo** se, para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$, existe caminho em G ligando u a v .

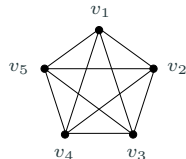
Caminhos, Ciclos e Grafos completos



Caminho P_5



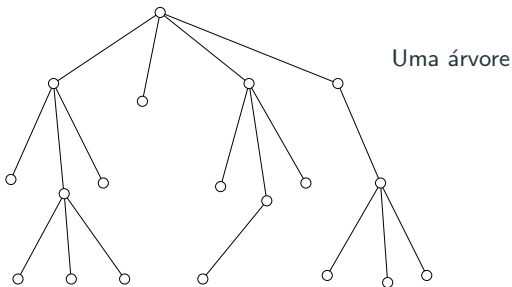
Ciclo C_5



Grafo Completo K_5

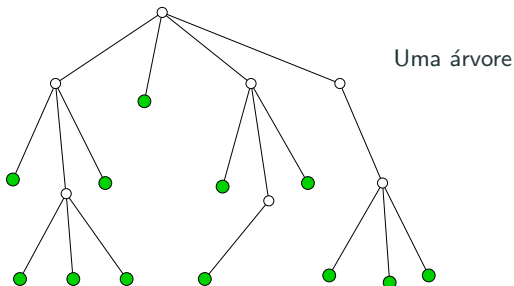
- G é um **grafo conexo** se, para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$, existe caminho em G ligando u a v .
- G **não contém ciclos** se nenhum de seus subgrafos é isomorfo a um ciclo.

- Uma **árvore** é um grafo simples, conexo e que não contém ciclos.



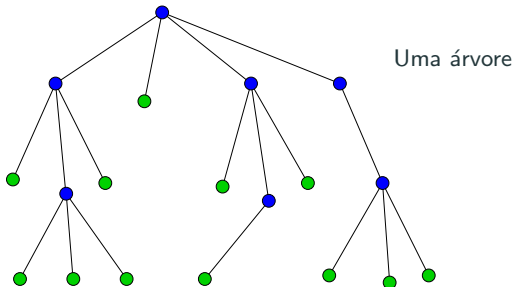
Árvores

- ▶ Uma **árvore** é um grafo simples, conexo e que não contém ciclos.
- ▶ **Folhas** são os vértices com grau 1.



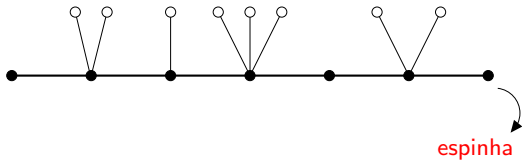
Árvores

- ▶ Uma **árvore** é um grafo simples, conexo e que não contém ciclos.
- ▶ **Folhas** são os vértices com grau 1.
- ▶ **Vértices internos** são os vértices com grau maior que 1.



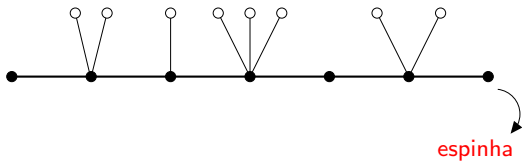
Caterpillars e Lobsters

Caterpillar

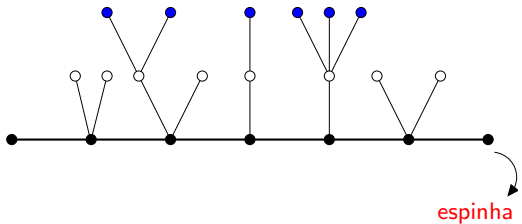


Caterpillars e Lobsters

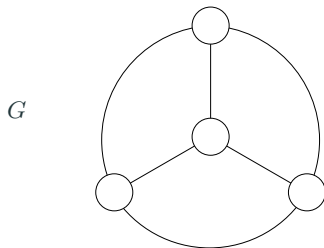
Caterpillar



Lobster



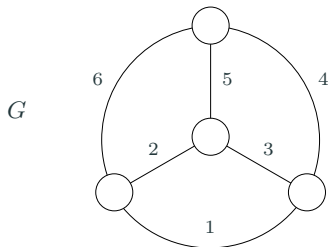
Rotulação em grafos



$$\mathcal{L} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo e $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}$

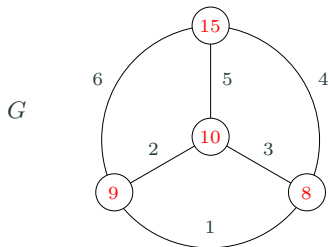
Rotulação em grafos



$$\mathcal{L} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo e $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}$
- Uma **rotulação** de G é uma atribuição de elementos do conjunto $\mathcal{L}$ aos elementos do grafo.

Rotulação em grafos



$$\mathcal{L} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo e $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}$
- Uma **rotulação** de G é uma atribuição de elementos do conjunto $\mathcal{L}$ aos elementos do grafo.
- Um **problema de rotulação** em grafos consiste em rotular os elementos de um grafo sujeito a determinadas condições.



Rotulação Graciosa

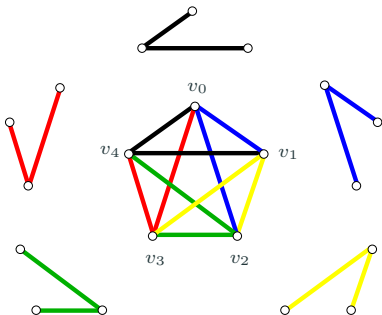
Rotulação graciosa — Origem

Checoslováquia, 1963

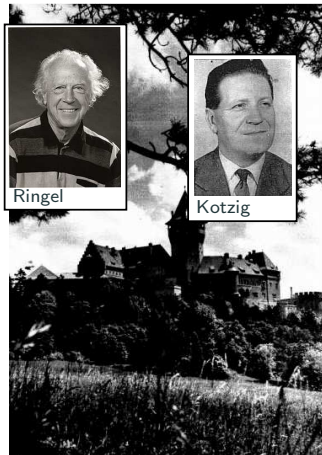


Rotulação graciosa — Origem

- **Conjetura de Ringel-Kotzig:** Qualquer árvore T com m arestas decompõe ciclicamente o grafo K_{2m+1} em $2m + 1$ subgrafos isomorfos a T .



Checoslováquia, 1963



Rotulação graciosa — Origem

- **Conjetura de Ringel-Kotzig:** Qualquer árvore T com m arestas decompõe ciclicamente o grafo K_{2m+1} em $2m + 1$ subgrafos isomorfos a T .

Rotulação- α



Rotulação- β

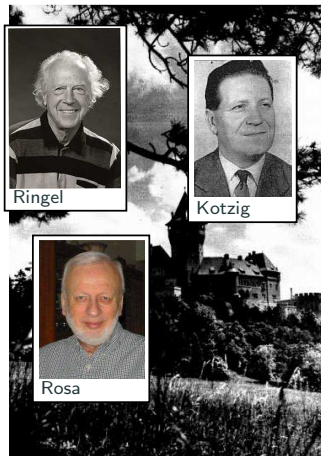


Rotulação- σ



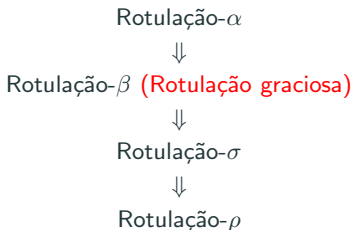
Rotulação- ρ

Checoslováquia, 1963

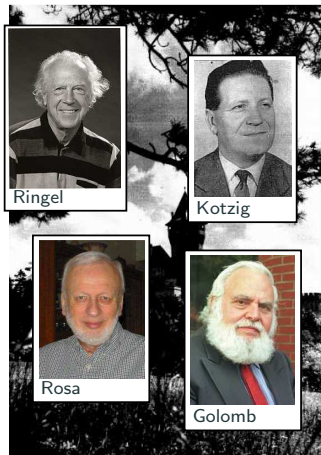


Rotulação graciosa — Origem

- **Conjetura de Ringel-Kotzig:** Qualquer árvore T com m arestas decompõe ciclicamente o grafo K_{2m+1} em $2m + 1$ subgrafos isomorfos a T .

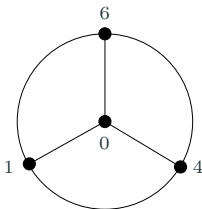


Checoslováquia, 1963



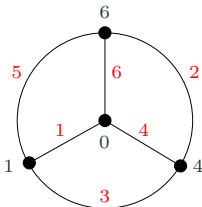
Rotulação graciosa

- Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo simples com m arestas.
- **Rotulação graciosa** de G : uma função injetora $f: V(G) \rightarrow \{0, \dots, m\}$ tal que, quando cada aresta $uv \in E(G)$ recebe o rótulo induzido $|f(u) - f(v)|$, o conjunto dos rótulos das arestas é $\{1, \dots, m\}$.



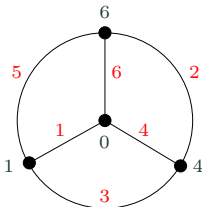
Rotulação graciosa

- Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo simples com m arestas.
- **Rotulação graciosa** de G : uma função injetora $f: V(G) \rightarrow \{0, \dots, m\}$ tal que, quando cada aresta $uv \in E(G)$ recebe o rótulo induzido $|f(u) - f(v)|$, o conjunto dos rótulos das arestas é $\{1, \dots, m\}$.



Rotulação graciosa

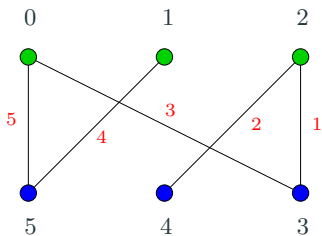
- Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo simples com m arestas.
- **Rotulação graciosa** de G : uma função injetora $f: V(G) \rightarrow \{0, \dots, m\}$ tal que, quando cada aresta $uv \in E(G)$ recebe o rótulo induzido $|f(u) - f(v)|$, o conjunto dos rótulos das arestas é $\{1, \dots, m\}$.



f é graciosa $\Rightarrow G$ é gracioso.

Rotulação- α

- ▶ Seja G grafo simples com m arestas.
- ▶ Uma rotulação graciosa f é uma **Rotulação- α** se:
 - existe $k \in \{0, \dots, m\}$ tal que, para toda aresta $uv \in E(G)$, $f(u) \leq k < f(v)$ ou $f(v) \leq k < f(u)$.



Conjetura das Árvores Graciosas

Conjetura das Árvores Graciosas [Rosa, 1967]

Toda árvore tem uma rotulação graciosa.

Conjetura das Árvores Graciosas

Conjetura das Árvores Graciosas [Rosa, 1967]

Toda árvore tem uma rotulação graciosa.

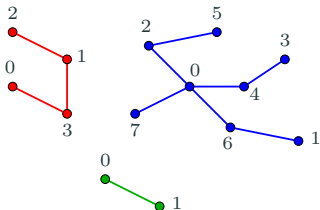
- Verificada para algumas famílias de árvores.
- Existem centenas de artigos publicados neste tema.
Resenha extensa: [Gallian 2017].

Conjetura das Árvores Graciosas

Conjetura das Árvores Graciosas [Rosa, 1967]

Toda árvore tem uma rotulação graciosa.

- Verificada para algumas famílias de árvores.
- Existem centenas de artigos publicados neste tema.
Resenha extensa: [Gallian 2017].

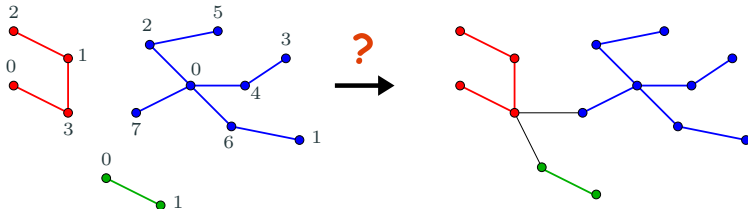


Conjetura das Árvores Graciosas

Conjetura das Árvores Graciosas [Rosa, 1967]

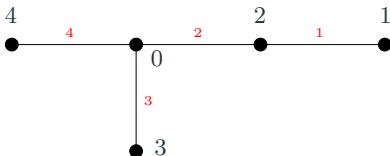
Toda árvore tem uma rotulação graciosa.

- Verificada para algumas famílias de árvores.
- Existem centenas de artigos publicados neste tema.
Resenha extensa: [Gallian 2017].



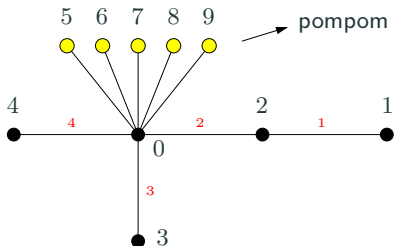
Importância do rótulo zero

- Dada uma árvore T graciosa, expandimos T adicionando k novas folhas ao vértice com rótulo 0.



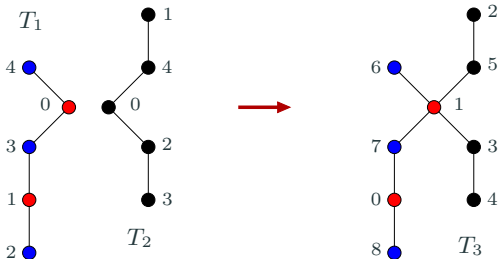
Importância do rótulo zero

- Dada uma árvore T graciosa, expandimos T adicionando k novas folhas ao vértice com rótulo 0.



Importância do rótulo zero

- Dada uma árvore T graciosa, expandimos T adicionando k novas folhas ao vértice com rótulo 0.
- Sob condições específicas, podemos identificar duas árvores nos vértices com rótulo 0.



Importância do rótulo zero

- Dada uma árvore T graciosa, expandimos T adicionando k novas folhas ao vértice com rótulo 0.
- Sob condições específicas, podemos identificar duas árvores nos vértices com rótulo 0.

Definição

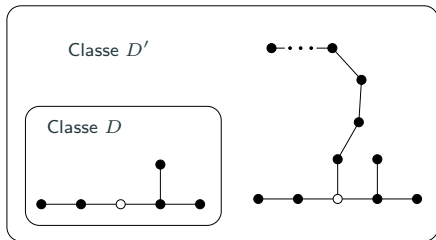
Uma árvore T é **0-rotativa** se, para todo $v \in V(T)$, existe uma rotulação graciosa f de T tal que $f(v) = 0$.

0-rotatividade de caminhos e caterpillars

- Todos os caminhos são 0-rotativos. [Rosa 1967]
- Todos os caterpillars com diâmetro no máximo três são 0-rotativos.
[Bussel 2004]

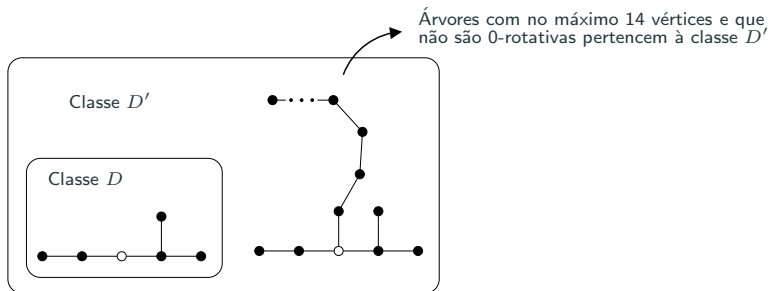
0-rotatividade de caminhos e caterpillars

- Todos os caminhos são 0-rotativos. [Rosa 1967]
- Todos os caterpillars com diâmetro no máximo três são 0-rotativos. [Bussel 2004]
- Nem todos os caterpillars com diâmetro quatro são 0-rotativos. [Bussel 2004]



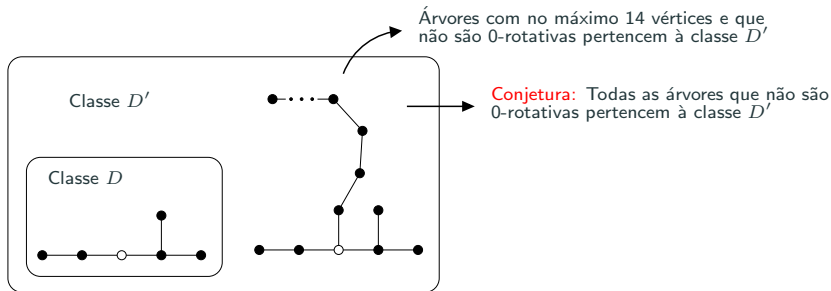
0-rotatividade de caminhos e caterpillars

- Todos os caminhos são 0-rotativos. [Rosa 1967]
- Todos os caterpillars com diâmetro no máximo três são 0-rotativos. [Bussel 2004]
- Nem todos os caterpillars com diâmetro quatro são 0-rotativos. [Bussel 2004]



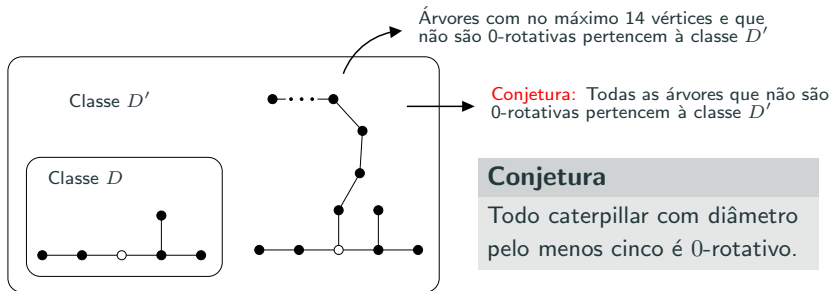
0-rotatividade de caminhos e caterpillars

- Todos os caminhos são 0-rotativos. [Rosa 1967]
- Todos os caterpillars com diâmetro no máximo três são 0-rotativos. [Bussel 2004]
- Nem todos os caterpillars com diâmetro quatro são 0-rotativos. [Bussel 2004]



0-rotatividade de caminhos e caterpillars

- Todos os caminhos são 0-rotativos. [Rosa 1967]
- Todos os caterpillars com diâmetro no máximo três são 0-rotativos. [Bussel 2004]
- Nem todos os caterpillars com diâmetro quatro são 0-rotativos. [Bussel 2004]

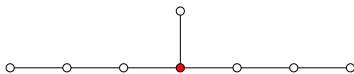


Nossos resultados

Teorema [Luiz, Campos e Richter]: As seguintes famílias de caterpillars são 0-rotativas:



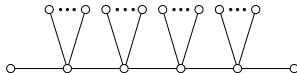
caterpillar com emparelhamento perfeito



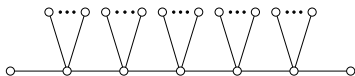
caterpillar cujo vértice central tem grau três



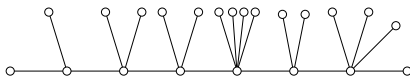
caterpillar com pompom na extremidade



caterpillar com diâmetro 5



caterpillar com diâmetro 6



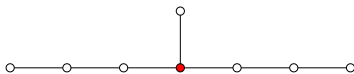
famílias com diâmetro ≥ 7

Nossos resultados

Teorema [Luiz, Campos e Richter]: As seguintes famílias de caterpillars são 0-rotativas:



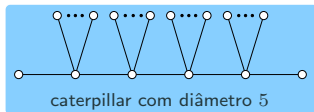
caterpillar com emparelhamento perfeito



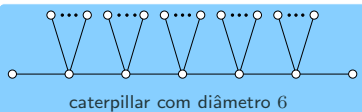
caterpillar cujo vértice central tem grau três



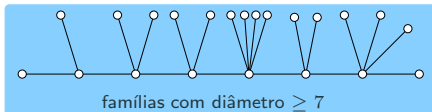
caterpillar com pompom na extremidade



caterpillar com diâmetro 5



caterpillar com diâmetro 6

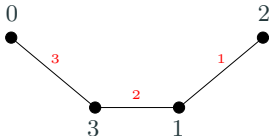


famílias com diâmetro ≥ 7

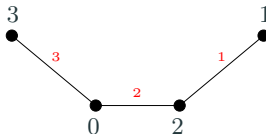
Ferramenta 1 - Rotulação complementar

- Seja G com m arestas e com uma rotulação graciosa f .
- **Rotulação complementar** de f :

$$\overline{f}(v) = m - f(v).$$

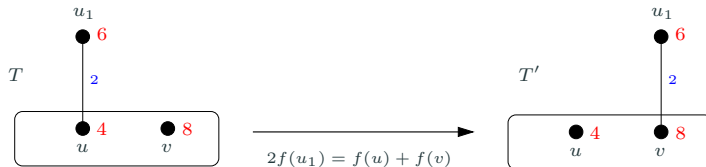
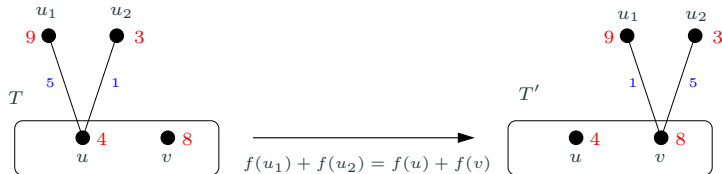


f



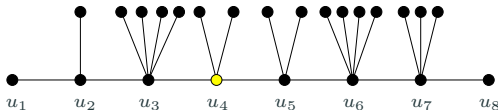
$\overline{f}$

Ferramenta 2 - Método de transferência



Família de caterpillars com $\text{diam}(T) \geq 7$ ímpar

- Caterpillar T com diâmetro ímpar (≥ 7) tal que todos os vértices internos são adjacentes a um número par (≥ 2) de folhas.

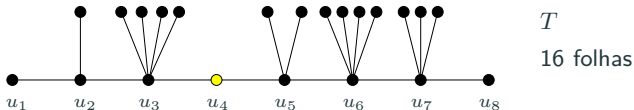


T

18 folhas

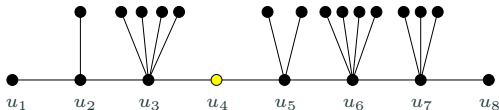
Família de caterpillars com $\text{diam}(T) \geq 7$ ímpar

- Caterpillar T com diâmetro ímpar (≥ 7) tal que todos os vértices internos são adjacentes a um número par (≥ 2) de folhas.



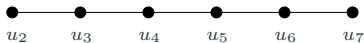
Família de caterpillars com $\text{diam}(T) \geq 7$ ímpar

- Caterpillar T com diâmetro ímpar (≥ 7) tal que todos os vértices internos são adjacentes a um número par (≥ 2) de folhas.



T

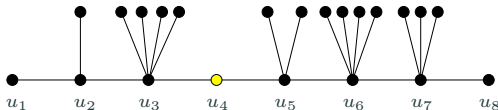
16 folhas



base de T

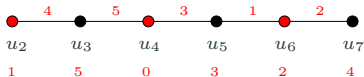
Família de caterpillars com $\text{diam}(T) \geq 7$ ímpar

- Caterpillar T com diâmetro ímpar (≥ 7) tal que todos os vértices internos são adjacentes a um número par (≥ 2) de folhas.



T

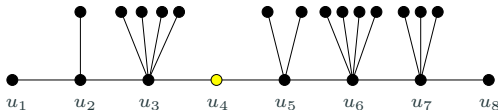
16 folhas



base de T

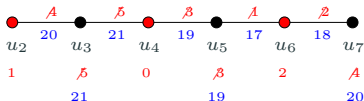
Família de caterpillars com $\text{diam}(T) \geq 7$ ímpar

- Caterpillar T com diâmetro ímpar (≥ 7) tal que todos os vértices internos são adjacentes a um número par (≥ 2) de folhas.



T

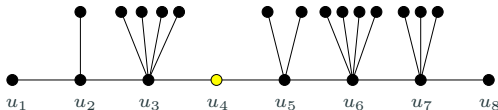
16 folhas



base de T

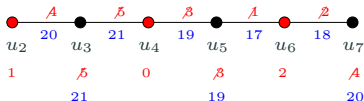
Família de caterpillars com $\text{diam}(T) \geq 7$ ímpar

- Caterpillar T com diâmetro ímpar (≥ 7) tal que todos os vértices internos são adjacentes a um número par (≥ 2) de folhas.



T

16 folhas

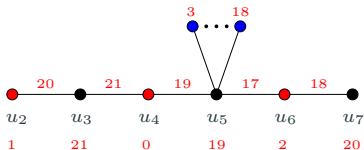
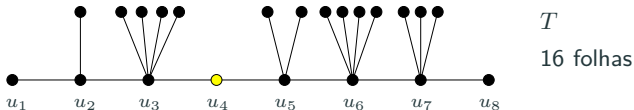


base de T

- 3, 4, ..., 18 estão faltando nos vértices.
- 1, 2, ..., 16 não são induzidos nas arestas.

Família de caterpillars com $\text{diam}(T) \geq 7$ ímpar

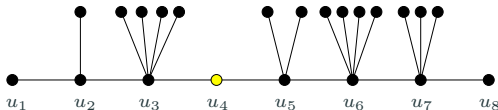
- Caterpillar T com diâmetro ímpar (≥ 7) tal que todos os vértices internos são adjacentes a um número par (≥ 2) de folhas.



- 3, 4, ..., 18 estão faltando nos vértices.
- 1, 2, ..., 16 não são induzidos nas arestas.

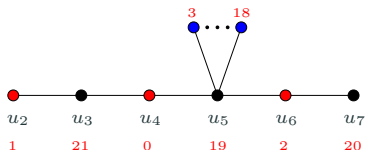
Família de caterpillars com $\text{diam}(T) \geq 7$ ímpar

- Caterpillar T com diâmetro ímpar (≥ 7) tal que todos os vértices internos são adjacentes a um número par (≥ 2) de folhas.



T

16 folhas



$$3 + 18 = 21$$

$$4 + 17 = 21$$

$$5 + 16 = 21$$

$$6 + 15 = 21$$

$$7 + 14 = 21$$

$$8 + 13 = 21$$

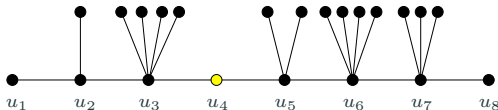
$$9 + 12 = 21$$

$$10 + 11 = 21$$

- Sequência de transferências: $19 \rightarrow 2 \rightarrow 20 \rightarrow 1 \rightarrow 21$.
- Regra de transferência: $f(u_1) + f(u_2) = f(u) + f(v)$.

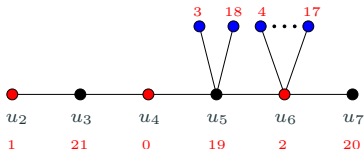
Família de caterpillars com $\text{diam}(T) \geq 7$ ímpar

- Caterpillar T com diâmetro ímpar (≥ 7) tal que todos os vértices internos são adjacentes a um número par (≥ 2) de folhas.



T

16 folhas



$$3 + 18 = 21$$

$$4 + 17 = 21$$

$$5 + 16 = 21$$

$$6 + 15 = 21$$

$$7 + 14 = 21$$

$$8 + 13 = 21$$

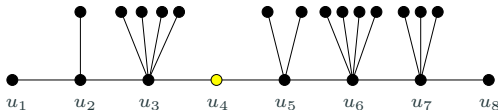
$$9 + 12 = 21$$

$$10 + 11 = 21$$

- Sequência de transferências: $19 \rightarrow 2 \rightarrow 20 \rightarrow 1 \rightarrow 21$.
- Regra de transferência: $f(u_1) + f(u_2) = f(u) + f(v)$.

Família de caterpillars com $\text{diam}(T) \geq 7$ ímpar

- Caterpillar T com diâmetro ímpar (≥ 7) tal que todos os vértices internos são adjacentes a um número par (≥ 2) de folhas.



T

16 folhas

4

$$5 + 17 = 22$$

$$6 + 16 = 22$$

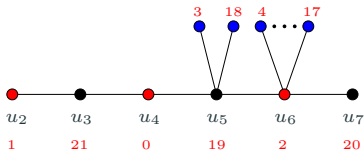
$$7 + 15 = 22$$

$$8 + 14 = 22$$

$$9 + 13 = 22$$

$$10 + 12 = 22$$

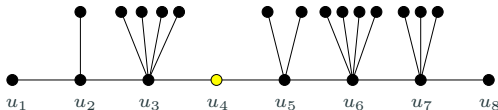
11



- Sequência de transferências: $19 \rightarrow 2 \rightarrow 20 \rightarrow 1 \rightarrow 21$.
- Regra de transferência: $f(u_1) + f(u_2) = f(u) + f(v)$.

Família de caterpillars com $\text{diam}(T) \geq 7$ ímpar

- Caterpillar T com diâmetro ímpar (≥ 7) tal que todos os vértices internos são adjacentes a um número par (≥ 2) de folhas.



T

16 folhas

4

$$5 + 17 = 22$$

$$6 + 16 = 22$$

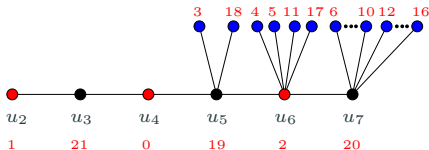
$$7 + 15 = 22$$

$$8 + 14 = 22$$

$$9 + 13 = 22$$

$$10 + 12 = 22$$

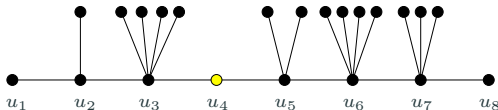
11



- Sequência de transferências: $19 \rightarrow 2 \rightarrow 20 \rightarrow 1 \rightarrow 21$.
- Regra de transferência: $f(u_1) + f(u_2) = f(u) + f(v)$.

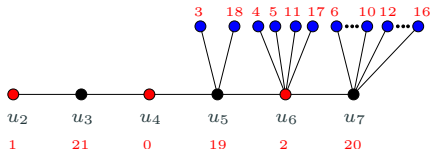
Família de caterpillars com $\text{diam}(T) \geq 7$ ímpar

- Caterpillar T com diâmetro ímpar (≥ 7) tal que todos os vértices internos são adjacentes a um número par (≥ 2) de folhas.



T

16 folhas



16

$$6 + 15 = 21$$

$$7 + 14 = 21$$

$$8 + 13 = 21$$

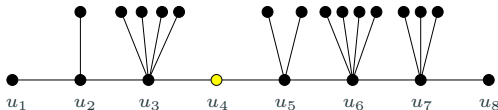
$$9 + 12 = 21$$

10

- Sequência de transferências: $19 \rightarrow 2 \rightarrow 20 \rightarrow 1 \rightarrow 21$.
- Regra de transferência: $f(u_1) + f(u_2) = f(u) + f(v)$.

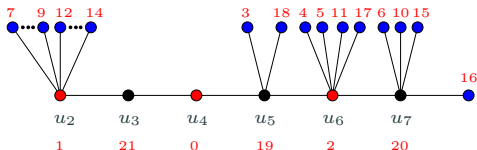
Família de caterpillars com $\text{diam}(T) \geq 7$ ímpar

- Caterpillar T com diâmetro ímpar (≥ 7) tal que todos os vértices internos são adjacentes a um número par (≥ 2) de folhas.



T

16 folhas



16

$$6 + 15 = 21$$

$$7 + 14 = 21$$

$$8 + 13 = 21$$

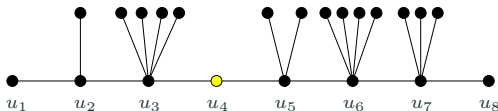
$$9 + 12 = 21$$

10

- Sequência de transferências: $19 \rightarrow 2 \rightarrow 20 \rightarrow 1 \rightarrow 21$.
- Regra de transferência: $f(u_1) + f(u_2) = f(u) + f(v)$.

Família de caterpillars com $\text{diam}(T) \geq 7$ ímpar

- Caterpillar T com diâmetro ímpar (≥ 7) tal que todos os vértices internos são adjacentes a um número par (≥ 2) de folhas.



T

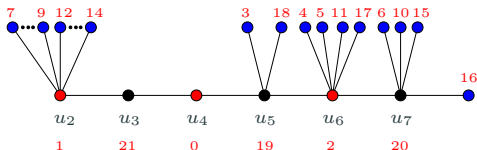
16 folhas

7

$$8 + 14 = 22$$

$$9 + 13 = 22$$

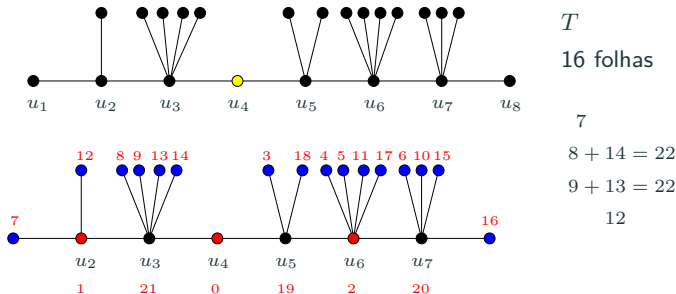
12



- Sequência de transferências: $19 \rightarrow 2 \rightarrow 20 \rightarrow 1 \rightarrow 21$.
- Regra de transferência: $f(u_1) + f(u_2) = f(u) + f(v)$.

Família de caterpillars com $\text{diam}(T) \geq 7$ ímpar

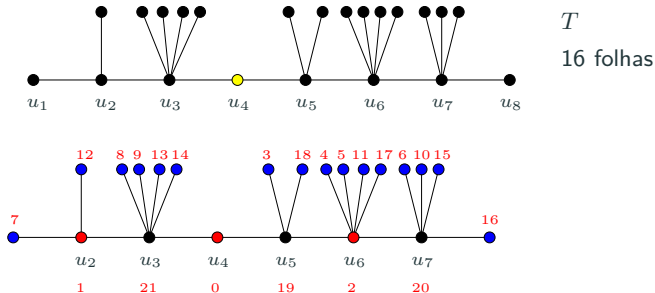
- Caterpillar T com diâmetro ímpar (≥ 7) tal que todos os vértices internos são adjacentes a um número par (≥ 2) de folhas.



- Sequência de transferências: $19 \rightarrow 2 \rightarrow 20 \rightarrow 1 \rightarrow 21$.
- Regra de transferência: $f(u_1) + f(u_2) = f(u) + f(v)$.

Família de caterpillars com $\text{diam}(T) \geq 7$ ímpar

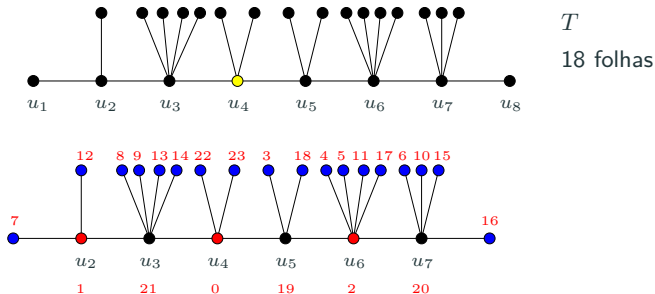
- Caterpillar T com diâmetro ímpar (≥ 7) tal que todos os vértices internos são adjacentes a um número par (≥ 2) de folhas.



- Adicionamos duas folhas ao vértice com rótulo 0.

Família de caterpillars com $\text{diam}(T) \geq 7$ ímpar

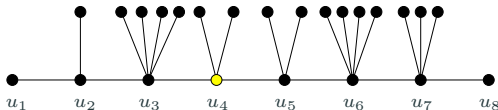
- Caterpillar T com diâmetro ímpar (≥ 7) tal que todos os vértices internos são adjacentes a um número par (≥ 2) de folhas.



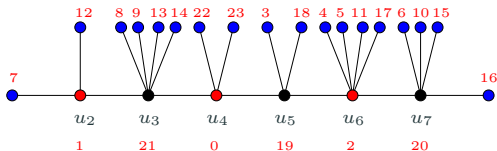
- Adicionamos duas folhas ao vértice com rótulo 0.

Família de caterpillars com $\text{diam}(T) \geq 7$ ímpar

- Caterpillar T com diâmetro ímpar (≥ 7) tal que todos os vértices internos são adjacentes a um número par (≥ 2) de folhas.



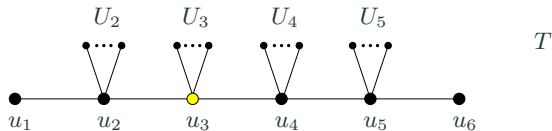
T
18 folhas



- Adicionamos duas folhas ao vértice com rótulo 0.
- A fim de obtermos o rótulo 0 numa folha do u_4 , usamos a rotulação complementar.

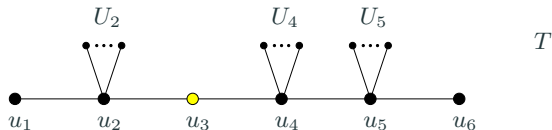


Caterpillars com diâmetro cinco - Esquema



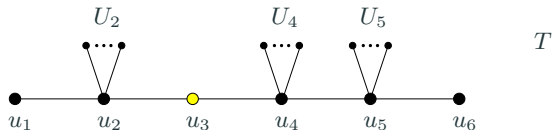
- [Rosa 1967]: $u_1, u_2, u_5, u_6, U_2, U_5$ estão resolvidos.

Caterpillars com diâmetro cinco - Esquema

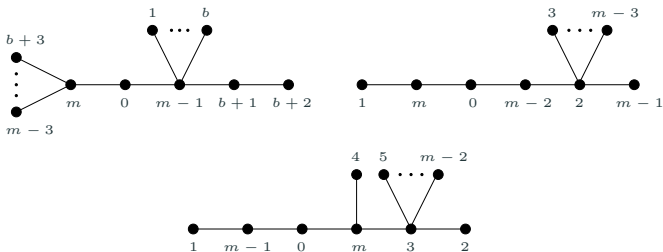


- [Rosa 1967]: $u_1, u_2, u_5, u_6, U_2, U_5$ estão resolvidos.

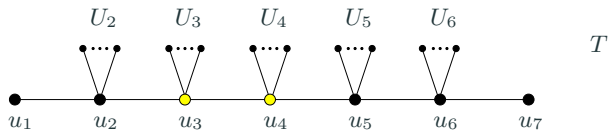
Caterpillars com diâmetro cinco - Esquema



- [Rosa 1967]: $u_1, u_2, u_5, u_6, U_2, U_5$ estão resolvidos.
- $u_3 \Rightarrow$ usamos árvores modelo + transferências.

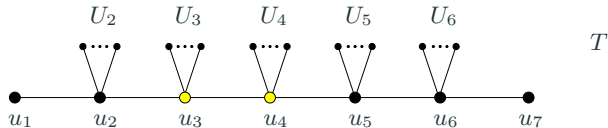


Caterpillars com diâmetro seis - Esquema

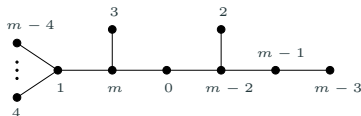
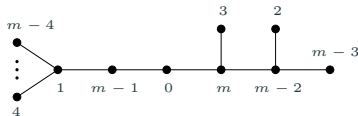
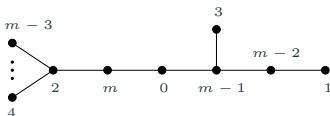
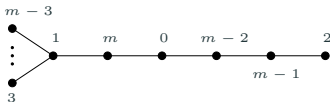


- [Rosa 1967]: $u_1, u_2, u_6, u_7, U_2, U_6 \Rightarrow$ estão resolvidos.

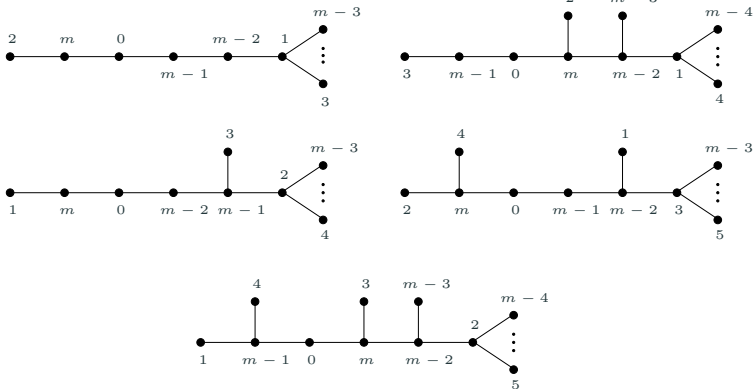
Caterpillars com diâmetro seis - Esquema



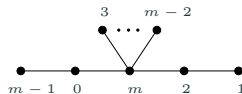
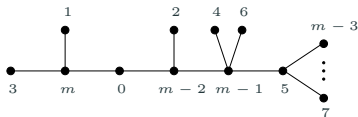
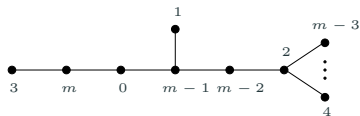
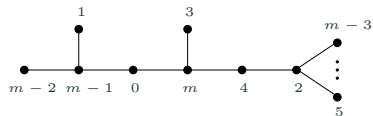
- [Rosa 1967]: $u_1, u_2, u_6, u_7, U_2, U_6 \Rightarrow$ estão resolvidos.
- $u_3, u_4 \Rightarrow$ usamos árvores modelo + transferências.



Caterpillars com diâmetro seis - Esquema



Caterpillars com diâmetro seis - Esquema

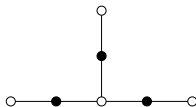


Rotulação- α de lobsters

- Todo caterpillar tem rotulação- α . [Rosa 1967]

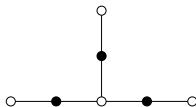
Rotulação- α de lobsters

- Todo caterpillar tem rotulação- α . [Rosa 1967]
- Nem todos os lobsters têm rotulação- α . [Rosa 1967]



Rotulação- α de lobsters

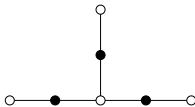
- Todo caterpillar tem rotulação- α . [Rosa 1967]
- Nem todos os lobsters têm rotulação- α . [Rosa 1967]



- **Problema aberto:** Quais lobsters com $\Delta(G) = 3$ possuem rotulação- α ?

Rotulação- α de lobsters

- Todo caterpillar tem rotulação- α . [Rosa 1967]
- Nem todos os lobsters têm rotulação- α . [Rosa 1967]



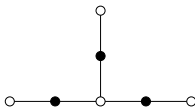
- **Problema aberto:** Quais lobsters com $\Delta(G) = 3$ possuem rotulação- α ?

Conjetura (Brankovic et al. 2005)

Todas as árvores com $\Delta(G) = 3$ e com emparelhamento perfeito possuem uma rotulação- α .

Rotulação- α de lobsters

- Todo caterpillar tem rotulação- α . [Rosa 1967]
- Nem todos os lobsters têm rotulação- α . [Rosa 1967]



- **Problema aberto:** Quais lobsters com $\Delta(G) = 3$ possuem rotulação- α ?

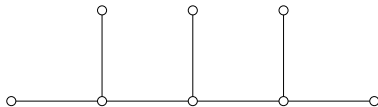
Conjetura (Brankovic et al. 2005)

Todas as árvores com $\Delta(G) = 3$ e com emparelhamento perfeito possuem uma rotulação- α .

↪ Vale para todos os Lobsters?

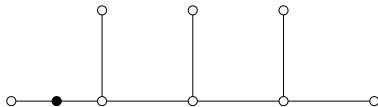
Família $\mathcal{F}$

[Brinkmann et al. 2012] Família $\mathcal{F}$ de árvores com $\Delta(G) = 3$ que não possuem rotulações- α :



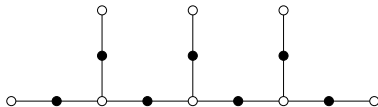
- Seja T árvore com $\Delta(T) = 3$ com $4k$ vértices, todos com grau ímpar.

[Brinkmann et al. 2012] Família $\mathcal{F}$ de árvores com $\Delta(G) = 3$ que não possuem rotulações- α :



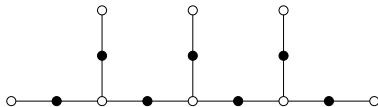
- Seja T árvore com $\Delta(T) = 3$ com $4k$ vértices, todos com grau ímpar.
- Subdivida cada aresta de T exatamente uma vez.

[Brinkmann et al. 2012] Família $\mathcal{F}$ de árvores com $\Delta(G) = 3$ que não possuem rotulações- α :



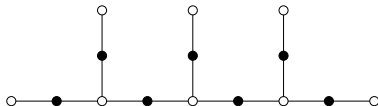
- Seja T árvore com $\Delta(T) = 3$ com $4k$ vértices, todos com grau ímpar.
- Subdivida cada aresta de T exatamente uma vez.

[Brinkmann et al. 2012] Família $\mathcal{F}$ de árvores com $\Delta(G) = 3$ que não possuem rotulações- α :



- Seja T árvore com $\Delta(T) = 3$ com $4k$ vértices, todos com grau ímpar.
- Subdivida cada aresta de T exatamente uma vez.
- Todas as árvores com $\Delta(G) = 3$, com $15 \leq |V(T)| \leq 31$ e que não possuem rotulações- α , pertencem à família $\mathcal{F}$.

[Brinkmann et al. 2012] Família $\mathcal{F}$ de árvores com $\Delta(G) = 3$ que não possuem rotulações- α :



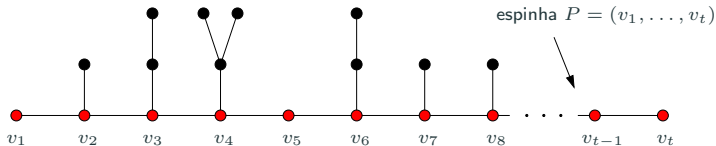
- Seja T árvore com $\Delta(T) = 3$ com $4k$ vértices, todos com grau ímpar.
- Subdivida cada aresta de T exatamente uma vez.
- Todas as árvores com $\Delta(G) = 3$, com $15 \leq |V(T)| \leq 31$ e que não possuem rotulações- α , pertencem à família $\mathcal{F}$.

Pergunta (Brinkmann et al. 2012)

Todas as árvores com pelo menos 15 vértices, com $\Delta(G) = 3$ e sem rotulações- α pertencem à família $\mathcal{F}$?

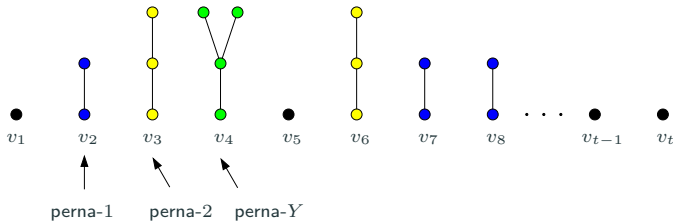
Lobsters

- Seja G lobster com $\Delta(G) = 3$.



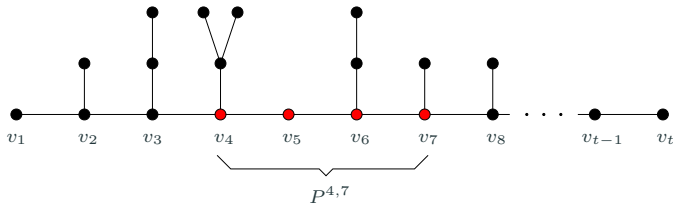
Lobsters

- Seja G lobster com $\Delta(G) = 3$.



Lobsters

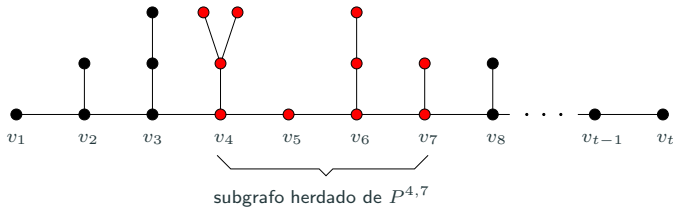
- Seja G lobster com $\Delta(G) = 3$.



- Denotamos por $P^{i,j}$ o subcaminho $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_j)$.

Lobsters

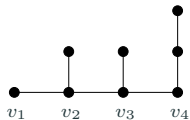
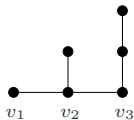
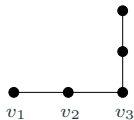
- Seja G lobster com $\Delta(G) = 3$.



- Denotamos por $P^{i,j}$ o subcaminho $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_j)$.

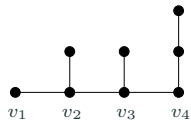
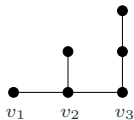
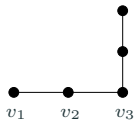
Terminações proibidas

Prefixos proibidos:

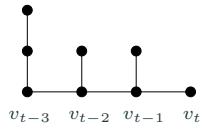
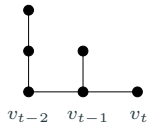
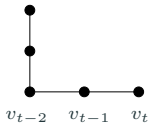


Terminações proibidas

Prefixos proibidos:



Sufixos proibidos:



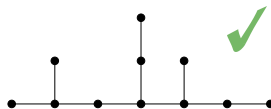
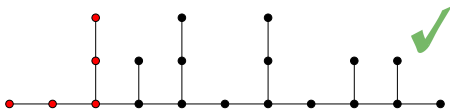
Teorema [Luiz, Campos e Richter]

Se G é um lobster com $\Delta(G) = 3$, sem pernas- Y e com no máximo uma terminação proibida, então G tem uma rotulação- α .

Nosso Resultado

Teorema [Luiz, Campos e Richter]

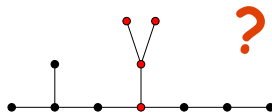
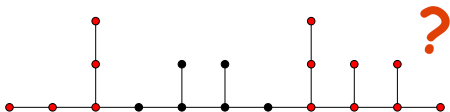
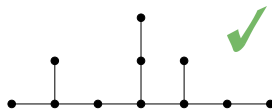
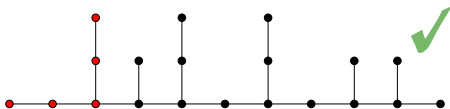
Se G é um lobster com $\Delta(G) = 3$, sem pernas- Y e com no máximo uma terminação proibida, então G tem uma rotulação- α .



Nosso Resultado

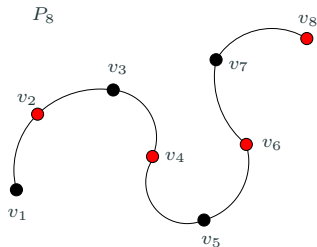
Teorema [Luiz, Campos e Richter]

Se G é um lobster com $\Delta(G) = 3$, sem pernas- Y e com no máximo uma terminação proibida, então G tem uma rotulação- α .



π -representação

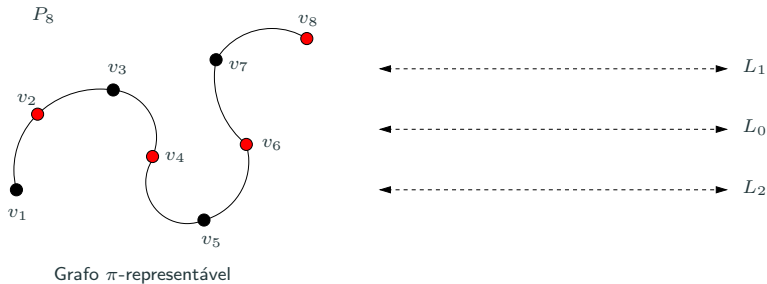
- Introduzida por Kotzig para investigar rotações- α de árvores.



Grafo π -representável

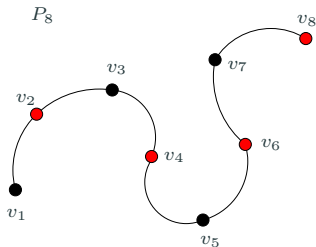
π -representação

- Introduzida por Kotzig para investigar rotações- α de árvores.

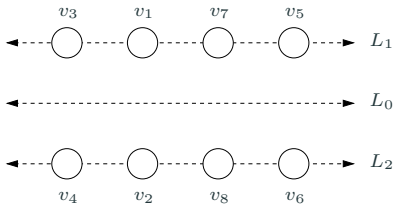


π -representação

- Introduzida por Kotzig para investigar rotações- α de árvores.

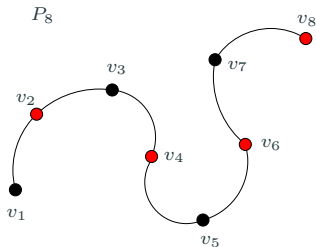


Grafo π -representável

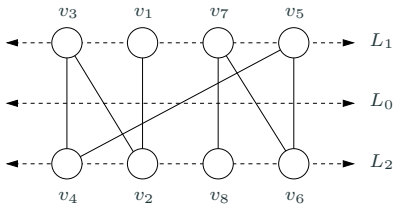


π -representação

- Introduzida por Kotzig para investigar rotações- α de árvores.

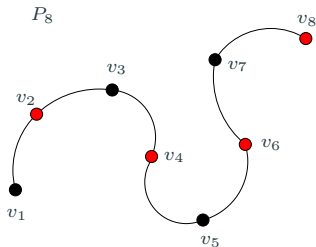


Grafo π -representável

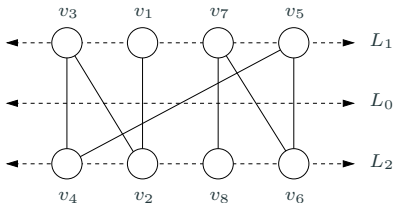


π -representação

- Introduzida por Kotzig para investigar rotações- α de árvores.



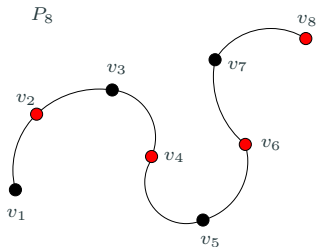
Grafo π -representável



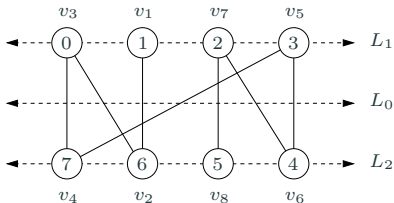
- [Kotzig 1973]: T tem uma rotação- $\alpha \iff T$ tem uma π -representação.

π -representação

- Introduzida por Kotzig para investigar rotações- α de árvores.



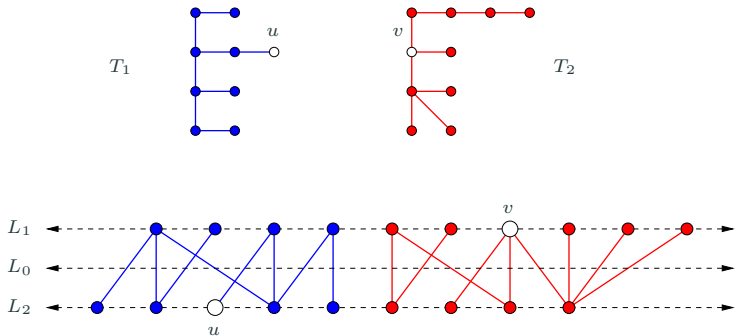
Grafo π -representável



- [Kotzig 1973]: T tem uma rotação- $\alpha \iff T$ tem uma π -representação.

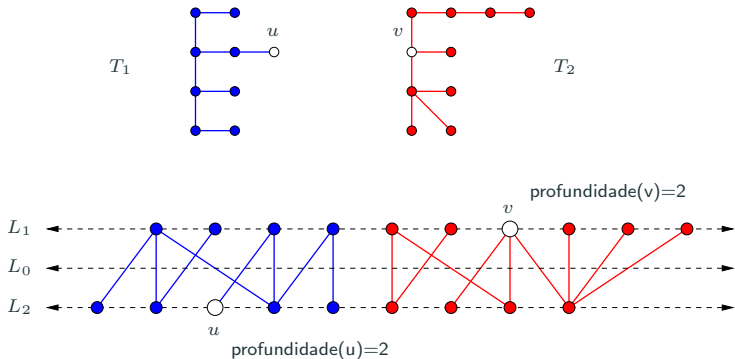
π -representação

- [Kotzig 1973]: Duas árvores π -representáveis podem ser ligadas de modo a obter uma árvore π -representável maior.



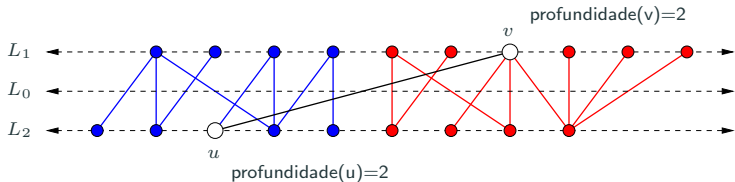
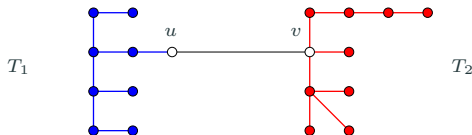
π -representação

- [Kotzig 1973]: Duas árvores π -representáveis podem ser ligadas de modo a obter uma árvore π -representável maior.



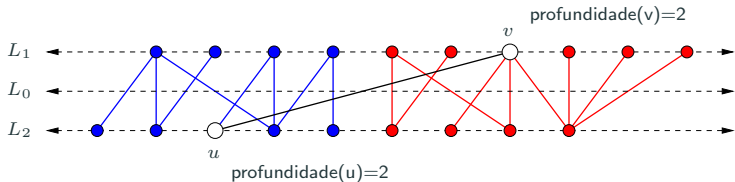
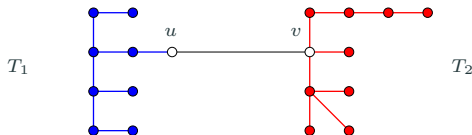
π -representação

- [Kotzig 1973]: Duas árvores π -representáveis podem ser ligadas de modo a obter uma árvore π -representável maior.



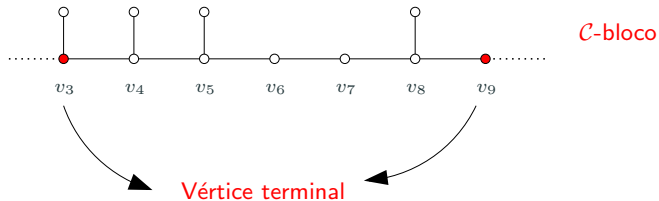
π -representação

- [Kotzig 1973]: Duas árvores π -representáveis podem ser ligadas de modo a obter uma árvore π -representável maior.

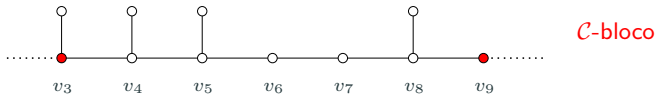


- **Ideia:** Decompor lobsters em subárvores com π -representações adequadas.

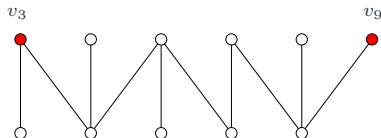
$\mathcal{C}$ -Bloco: subgrafo herdado do subcaminho $P^{i,j}$ e que não tem pernas-2.

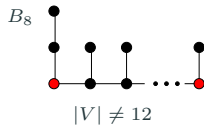
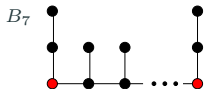
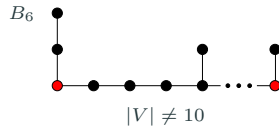
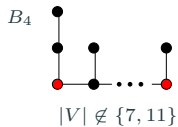
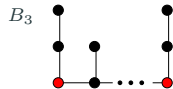
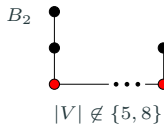
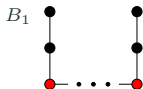


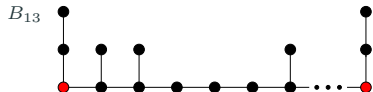
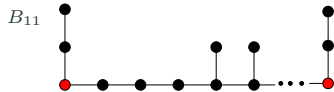
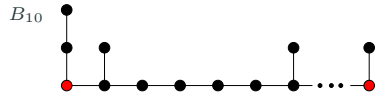
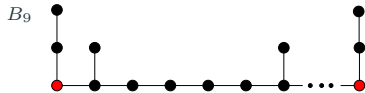
$\mathcal{C}$ -Bloco: subgrafo herdado do subcaminho $P^{i,j}$ e que não tem pernas-2.



- Todo $\mathcal{C}$ -bloco tem uma π -representação na qual a profundidade dos vértices terminais é igual a 0. [Kotzig 1973]







Blocos terminais restantes

Todos estes blocos possuem uma π -representação na qual os vértices terminais possuem profundidade igual a 0.

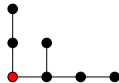
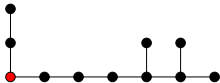
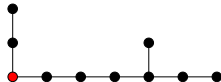


Ilustração da prova

- Seja G um lobster com $\Delta(G) = 3$, sem pernas- Y , e com no máximo uma terminação proibida. Seja $(v_1, v_2, \dots, v_t)$ a espinha de G .

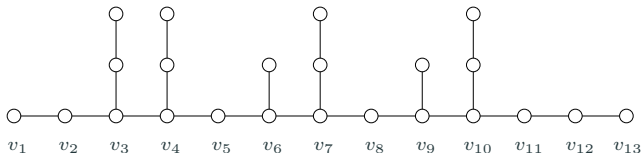
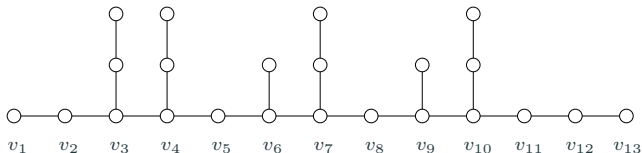


Ilustração da prova

- Seja G um lobster com $\Delta(G) = 3$, sem pernas- Y , e com no máximo uma terminação proibida. Seja $(v_1, v_2, \dots, v_t)$ a espinha de G .
- Ajustamos a notação tal que nenhum sufixo de G seja um sufixo proibido.



Sufixos proibidos

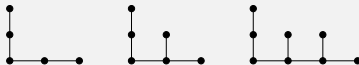


Ilustração da prova

- Seja G um lobster com $\Delta(G) = 3$, sem pernas- Y , e com no máximo uma terminação proibida. Seja $(v_1, v_2, \dots, v_t)$ a espinha de G .
- Ajustamos a notação tal que nenhum sufixo de G seja um sufixo proibido.

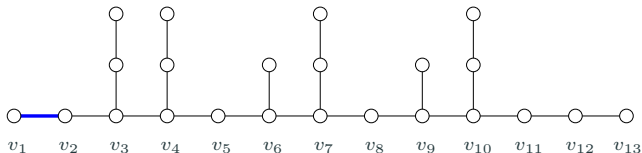


Ilustração da prova

- Seja G um lobster com $\Delta(G) = 3$, sem pernas- Y , e com no máximo uma terminação proibida. Seja $(v_1, v_2, \dots, v_t)$ a espinha de G .
- Ajustamos a notação tal que nenhum sufixo de G seja um sufixo proibido.

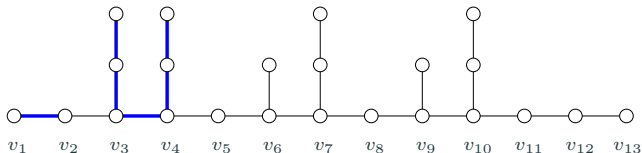


Ilustração da prova

- Seja G um lobster com $\Delta(G) = 3$, sem pernas- Y , e com no máximo uma terminação proibida. Seja $(v_1, v_2, \dots, v_t)$ a espinha de G .
- Ajustamos a notação tal que nenhum sufixo de G seja um sufixo proibido.

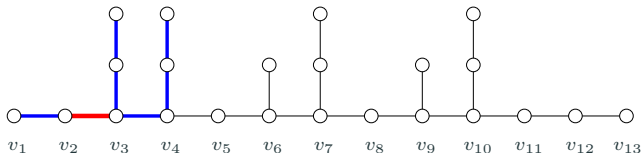


Ilustração da prova

- Seja G um lobster com $\Delta(G) = 3$, sem pernas- Y , e com no máximo uma terminação proibida. Seja $(v_1, v_2, \dots, v_t)$ a espinha de G .
- Ajustamos a notação tal que nenhum sufixo de G seja um sufixo proibido.

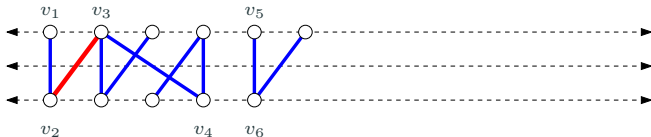
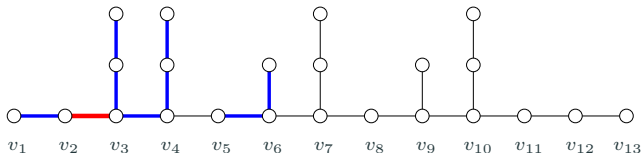


Ilustração da prova

- Seja G um lobster com $\Delta(G) = 3$, sem pernas- Y , e com no máximo uma terminação proibida. Seja $(v_1, v_2, \dots, v_t)$ a espinha de G .
- Ajustamos a notação tal que nenhum sufixo de G seja um sufixo proibido.

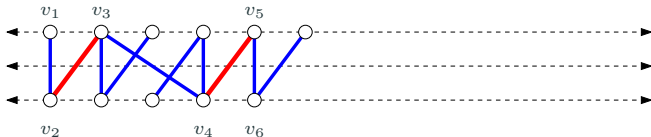
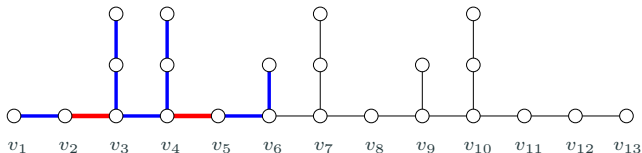


Ilustração da prova

- Seja G um lobster com $\Delta(G) = 3$, sem pernas- Y , e com no máximo uma terminação proibida. Seja $(v_1, v_2, \dots, v_t)$ a espinha de G .
- Ajustamos a notação tal que nenhum sufixo de G seja um sufixo proibido.

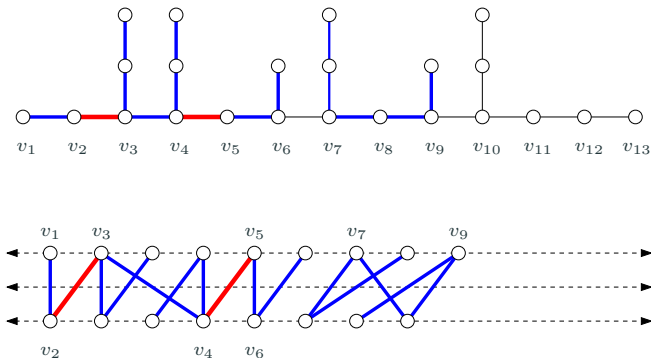


Ilustração da prova

- Seja G um lobster com $\Delta(G) = 3$, sem pernas- Y , e com no máximo uma terminação proibida. Seja $(v_1, v_2, \dots, v_t)$ a espinha de G .
- Ajustamos a notação tal que nenhum sufixo de G seja um sufixo proibido.

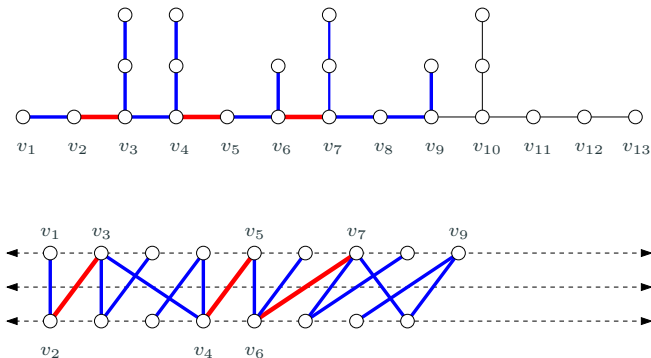


Ilustração da prova

- Seja G um lobster com $\Delta(G) = 3$, sem pernas- Y , e com no máximo uma terminação proibida. Seja $(v_1, v_2, \dots, v_t)$ a espinha de G .
- Ajustamos a notação tal que nenhum sufixo de G seja um sufixo proibido.

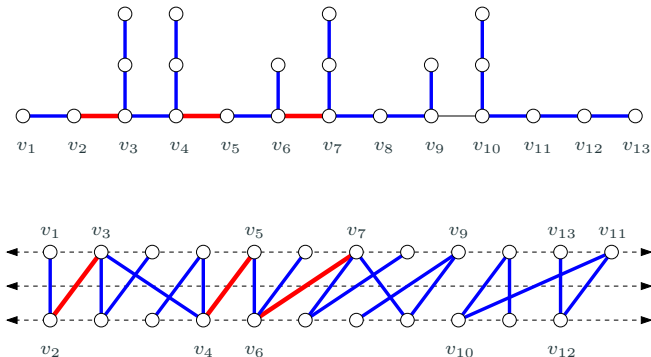


Ilustração da prova

- Seja G um lobster com $\Delta(G) = 3$, sem pernas- Y , e com no máximo uma terminação proibida. Seja $(v_1, v_2, \dots, v_t)$ a espinha de G .
- Ajustamos a notação tal que nenhum sufixo de G seja um sufixo proibido.

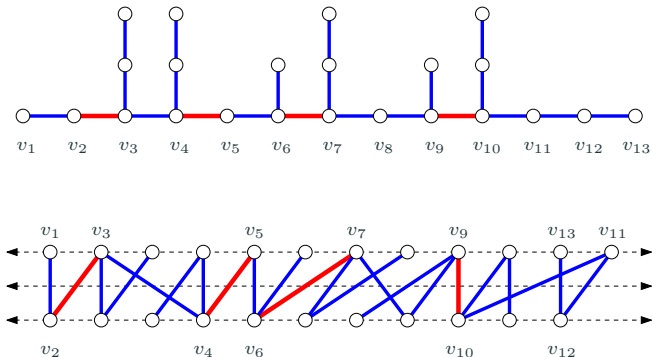
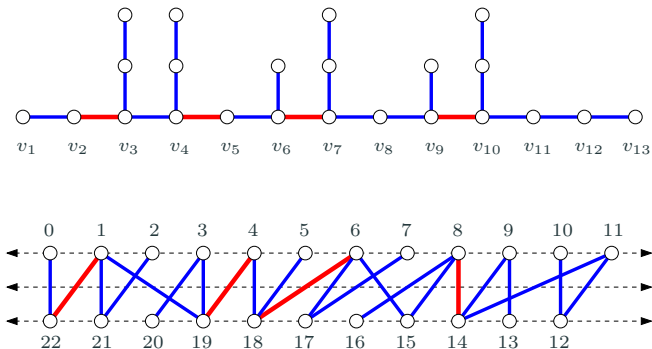


Ilustração da prova

- Seja G um lobster com $\Delta(G) = 3$, sem pernas- Y , e com no máximo uma terminação proibida. Seja $(v_1, v_2, \dots, v_t)$ a espinha de G .
- Ajustamos a notação tal que nenhum sufixo de G seja um sufixo proibido.



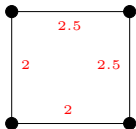


Rotulações Semifortes em Grafos

Rotulações semifortes

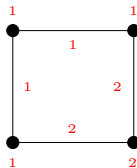
- Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo e $S = E(G)$ ou $S = V(G) \cup E(G)$.
- Dado $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}$, uma **$\mathcal{L}$ -rotulação** de G é uma função $\pi: S \rightarrow \mathcal{L}$.

$$S = E(G), \mathcal{L} = \{2, 2.5\}$$



$\mathcal{L}$ -rotulação de arestas

$$S = V(G) \cup E(G), \mathcal{L} = \{1, 2\}$$

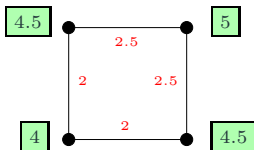


$\mathcal{L}$ -rotulação total

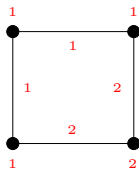
Rotulações semifortes

- Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo e $S = E(G)$ ou $S = V(G) \cup E(G)$.
- Dado $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}$, uma **$\mathcal{L}$ -rotulação** de G é uma função $\pi: S \rightarrow \mathcal{L}$.

$$C_\pi(v) = \sum_{uv \in E(G)} \pi(uv)$$



$\mathcal{L}$ -rotulação de arestas



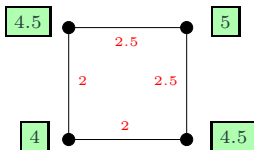
$\mathcal{L}$ -rotulação total

Rotulações semifortes

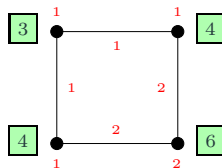
- Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo e $S = E(G)$ ou $S = V(G) \cup E(G)$.
- Dado $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}$, uma **$\mathcal{L}$ -rotulação** de G é uma função $\pi: S \rightarrow \mathcal{L}$.

$$C_\pi(v) = \sum_{uv \in E(G)} \pi(uv)$$

$$C_\pi(v) = \pi(v) + \sum_{uv \in E(G)} \pi(uv)$$



$\mathcal{L}$ -rotulação de arestas



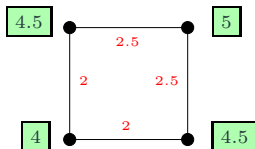
$\mathcal{L}$ -rotulação total

Rotulações semifortes

- Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo e $S = E(G)$ ou $S = V(G) \cup E(G)$.
- Dado $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}$, uma **$\mathcal{L}$ -rotulação** de G é uma função $\pi: S \rightarrow \mathcal{L}$.

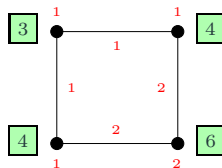
$$C_\pi(v) = \sum_{uv \in E(G)} \pi(uv)$$

$$C_\pi(v) = \pi(v) + \sum_{uv \in E(G)} \pi(uv)$$



$\mathcal{L}$ -rotulação de arestas

semiforte



$\mathcal{L}$ -rotulação total

semiforte

- (π, C_π) é uma rotulação **semiforte** de G se $C_\pi(u) \neq C_\pi(v)$, para quaisquer dois vértices adjacentes $u, v \in V(G)$.

Rotulação de arestas semiforte

Conjetura 1, 2, 3 [Karoński et al. 2004]

Todo grafo simples sem componentes conexas isomorfas ao K_2 possui uma $\{1, 2, 3\}$ -rotulação de arestas semiforte.



Michał Karoński



Tomasz Łuczak



Andrew Thomason

Conjetura 1, 2, 3 [Karoński et al. 2004]

Todo grafo simples sem componentes conexas isomorfas ao K_2 possui uma $\{1, 2, 3\}$ -rotulação de arestas semiforte.

- [Karoński et al. 2004]: Apenas os rótulos 1 e 2 podem ser suficientes.

Conjetura 1, 2, 3 [Karoński et al. 2004]

Todo grafo simples sem componentes conexas isomorfas ao K_2 possui uma $\{1, 2, 3\}$ -rotulação de arestas semiforte.

- [Karoński et al. 2004]: Apenas os rótulos 1 e 2 podem ser suficientes.
- [Dudek and Wajc 2011]: Decidir se um grafo arbitrário tem uma $\{1, 2\}$ -rotulação de arestas semiforte é um problema $\mathcal{NP}$ -completo.

Conjetura 1, 2, 3 [Karoński et al. 2004]

Todo grafo simples sem componentes conexas isomorfas ao K_2 possui uma $\{1, 2, 3\}$ -rotulação de arestas semiforte.

- [Karoński et al. 2004]: Apenas os rótulos 1 e 2 podem ser suficientes.
- [Dudek and Wajc 2011]: Decidir se um grafo arbitrário tem uma $\{1, 2\}$ -rotulação de arestas semiforte é um problema $\mathcal{NP}$ -completo.



Classes de grafos



[Khatirinejad et al. 2012]: Quais grafos possuem uma $\{a, b\}$ -rotulação de arestas semiforte, para $a, b \in \mathbb{R}$ distintos?

Conjetura 1, 2, 3 [Karoński et al. 2004]

Todo grafo simples sem componentes conexas isomorfas ao K_2 possui uma $\{1, 2, 3\}$ -rotulação de arestas semiforte.

- [Karoński et al. 2004]: Apenas os rótulos 1 e 2 podem ser suficientes.
- [Dudek and Wajc 2011]: Decidir se um grafo arbitrário tem uma $\{1, 2\}$ -rotulação de arestas semiforte é um problema $\mathcal{NP}$ -completo.



Classes de grafos



[Khatirinejad et al. 2012]: Quais grafos possuem uma $\{a, b\}$ -rotulação de arestas semiforte, para $a, b \in \mathbb{R}$ distintos?



[Bensmail 2013]: $\mathcal{NP}$ -completo, para quaisquer dois reais a, b distintos.

Conjetura 1, 2 [Przybyło and Woźniak 2010]

Todo grafo simples possui uma $\{1, 2\}$ -rotulação total semiforte.



Jakub Przybyło



Mariusz Woźniak

Conjetura 1, 2 [Przybyło and Woźniak 2010]

Todo grafo simples possui uma $\{1, 2\}$ -rotulação total semiforte.

- ▶ [\[Kalkowski 2010\]](#): Todo grafo simples tem uma $\{1, 2, 3\}$ -rotulação total semiforte.

Conjetura 1, 2 [Przybyło and Woźniak 2010]

Todo grafo simples possui uma $\{1, 2\}$ -rotulação total semiforte.

- ▶ [Kalkowski 2010]: Todo grafo simples tem uma $\{1, 2, 3\}$ -rotulação total semiforte.
- ▶ [Hulgan et al. 2016]: Algumas famílias grafos possuem uma $\{a, b\}$ -rotulação total semiforte, para quaisquer dois reais a, b distintos:
 - grafos completos
 - grafos multipartidos completos
 - grafos 3-coloráveis

Conjetura 1, 2 [Przybyło and Woźniak 2010]

Todo grafo simples possui uma $\{1, 2\}$ -rotulação total semiforte.

- ▶ [Kalkowski 2010]: Todo grafo simples tem uma $\{1, 2, 3\}$ -rotulação total semiforte.
- ▶ [Hulgan et al. 2016]: Algumas famílias grafos possuem uma $\{a, b\}$ -rotulação total semiforte, para quaisquer dois reais a, b distintos:
 - grafos completos
 - grafos multipartidos completos
 - grafos 3-coloráveis
- ▶ Pergunta [Hulgan et al. 2016]: Todo grafo simples possui uma $\{a, b\}$ -rotulação total semiforte, para quaisquer dois reais a, b distintos?

Nossos resultados

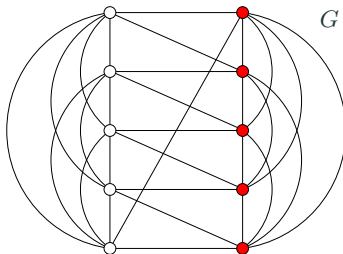
Classes	$\{a, b\}$ -total semiforte	$\{a, b, c\}$ -aresta semiforte
Grafos multipartidos completos	SIM [Hulgan et al. 2011]	SIM para $0 \leq a < b < c$
Grafos Split	SIM para $0 \leq a < b$	SIM para $0 \leq a < b < c$
Grafos cobipartidos regulares	SIM	SIM
Potências de caminho	SIM para $\{t, 2t\}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	SIM para $\{t, 2t, 3t\}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Potências de ciclo	SIM	SIM para $\{t, 2t, 3t\}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Nossos resultados

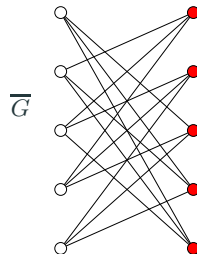
Classes	$\{a, b\}$ -total semiforte	$\{a, b, c\}$ -aresta semiforte
Grafos multipartidos completos	SIM [Hulgan et al. 2011]	SIM para $0 \leq a < b < c$
Grafos Split	SIM para $0 \leq a < b$	SIM para $0 \leq a < b < c$
Grafos cobipartidos regulares	SIM	SIM
Potências de caminho	SIM para $\{t, 2t\}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	SIM para $\{t, 2t, 3t\}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Potências de ciclo	SIM	SIM para $\{t, 2t, 3t\}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Grafos cobipartidos regulares

- Um grafo simples G é **cobipartido** se seu complemento é bipartido.



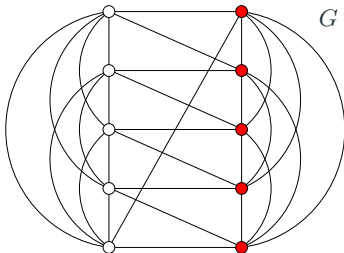
Grafo cobipartido 6-regular



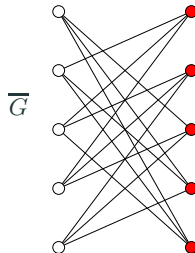
Grafo bipartido 3-regular

Grafos cobipartidos regulares

- Um grafo simples G é **cobipartido** se seu complemento é bipartido.



Grafo cobipartido 6-regular

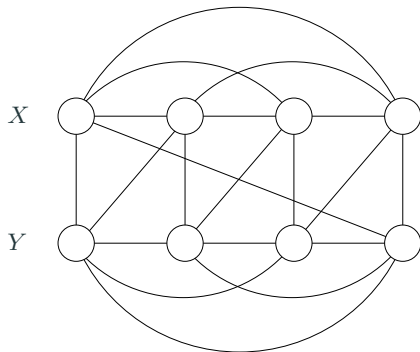


Grafo bipartido 3-regular

Teorema [Luiz, Campos, de Almeida]

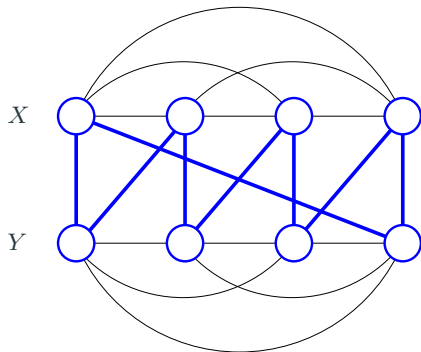
Se G é uma grafo cobipartido regular, então G tem uma $\{a, b\}$ -rotulação total semiforte, para $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. □

Cobipartidos regulares: Ilustração da prova



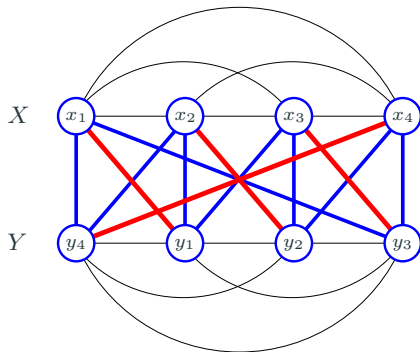
- Seja G um grafo cobipartido k -regular.
- Suponha $G \not\cong K_n$ (o resultado é conhecido para K_n).
- $V(G)$ pode ser particionado em duas cliques X e Y com $|X| = |Y|$.

Cobipartidos regulares: Ilustração da prova



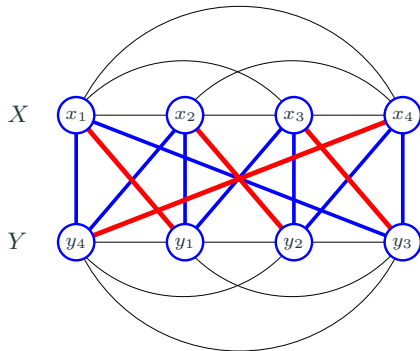
- Subgrafo destacado em **azul** é um grafo bipartido regular não-completo.
- É possível adicionar um emparelhamento perfeito M a G tal que o grafo resultante seja simples e $(k + 1)$ -regular.

Cobipartidos regulares: Ilustração da prova



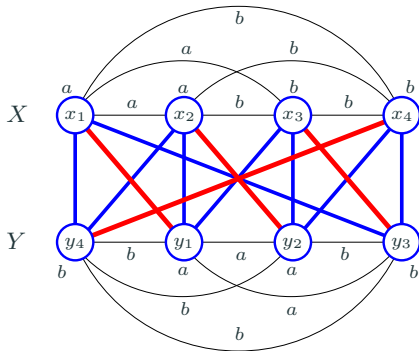
- Subgrafo destacado em **azul** é um grafo bipartido regular não-completo.
- É possível adicionar um emparelhamento perfeito M a G tal que o grafo resultante seja simples e $(k + 1)$ -regular.

Cobipartidos regulares: Ilustração da prova



- **Teorema (Hulgan et al. 2016):** K_n tem uma $\{a, b\}$ -rotulação total semiforte (π, C_π) .

Cobipartidos regulares: Ilustração da prova



$$c(x_1) = c(y_1) = 3a + b$$

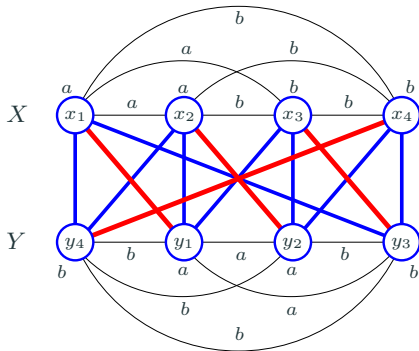
$$c(x_2) = c(y_2) = 2a + 2b$$

$$c(x_3) = c(y_3) = a + 3b$$

$$c(x_4) = c(y_4) = 4b$$

- **Teorema (Hulgan et al. 2016):** K_n tem uma $\{a, b\}$ -rotulação total semiforte (π, C_π) .
- Atribua (π, C_π) à $G[X]$ e $G[Y]$ tal que $C_\pi(x_i) = C_\pi(y_i)$.

Cobipartidos regulares: Ilustração da prova



$$c(x_1) = c(y_1) = 3a + b$$

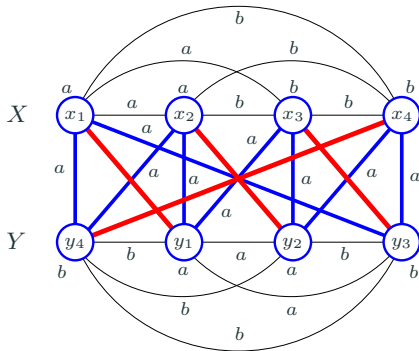
$$c(x_2) = c(y_2) = 2a + 2b$$

$$c(x_3) = c(y_3) = a + 3b$$

$$c(x_4) = c(y_4) = 4b$$

- **Teorema (Hulgan et al. 2016):** K_n tem uma $\{a, b\}$ -rotulação total semiforte (π, C_π) .
- Atribua (π, C_π) à $G[X]$ e $G[Y]$ tal que $C_\pi(x_i) = C_\pi(y_i)$.
- Por fim, atribua o rótulo a às arestas azuis.

Cobipartidos regulares: Ilustração da prova



$$c(x_1) = c(y_1) = 3a + b + 2a$$

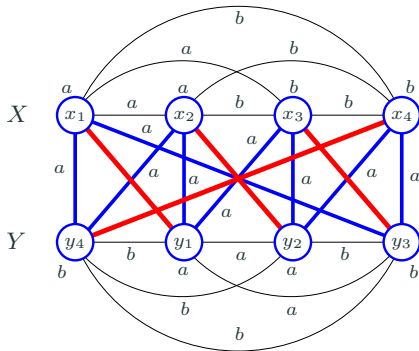
$$c(x_2) = c(y_2) = 2a + 2b + 2a$$

$$c(x_3) = c(y_3) = a + 3b + 2a$$

$$c(x_4) = c(y_4) = 4b + 2a$$

- **Teorema (Hulgan et al. 2016):** K_n tem uma $\{a, b\}$ -rotulação total semiforte (π, C_π) .
- Atribua (π, C_π) à $G[X]$ e $G[Y]$ tal que $C_\pi(x_i) = C_\pi(y_i)$.
- Por fim, atribua o rótulo a às arestas azuis.

Cobipartidos regulares: Ilustração da prova



$$c(x_1) = c(y_1) = 3a + b + 2a$$

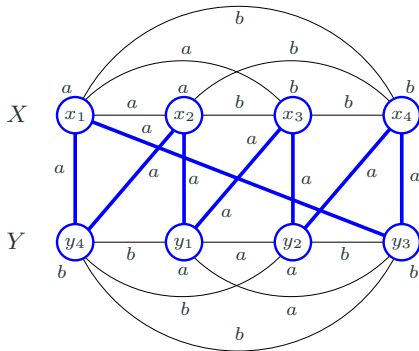
$$c(x_2) = c(y_2) = 2a + 2b + 2a$$

$$c(x_3) = c(y_3) = a + 3b + 2a$$

$$c(x_4) = c(y_4) = 4b + 2a$$

- Removendo o emparelhamento M , nós obtemos a rotulação desejada. $\square$

Cobipartidos regulares: Ilustração da prova



$$c(x_1) = c(y_1) = 3a + b + 2a$$

$$c(x_2) = c(y_2) = 2a + 2b + 2a$$

$$c(x_3) = c(y_3) = a + 3b + 2a$$

$$c(x_4) = c(y_4) = 4b + 2a$$

- Removendo o emparelhamento M , nós obtemos a rotulação desejada. $\square$

Cobipartidos regulares – Rotulação de arestas

Teorema [Luiz, Campos, de Almeida]

Seja $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$. Se G é um grafo cobipartido k -regular sem componentes conexas isomorfas ao K_2 , então G possui uma $\{a, b, c\}$ -rotulação de arestas semiforte. □

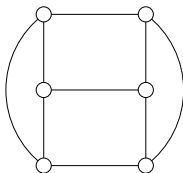
Cobipartidos regulares – Rotulação de arestas

Teorema [Luiz, Campos, de Almeida]

Seja $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$. Se G é um grafo cobipartido k -regular sem componentes conexas isomorfas ao K_2 , então G possui uma $\{a, b, c\}$ -rotulação de arestas semiforte. □

Conjetura

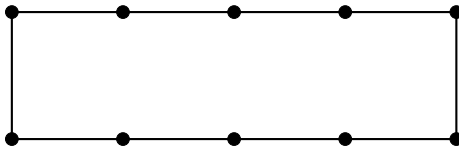
Com exceção do grafo abaixo, todo grafo cobipartido regular conexo não isomorfo ao grafo completo tem uma $\{a, b\}$ -rotulação de arestas semiforte, para quaisquer reais a, b distintos.



Potência de ciclo

A *k-ésima potência* do ciclo C_n é o grafo simples C_n^k tal que:

- $V(C_n^k) = V(C_n)$;
- $u, v \in V(C_n^k)$ são adjacentes $\iff d_{C_n}(u, v) \leq k$.

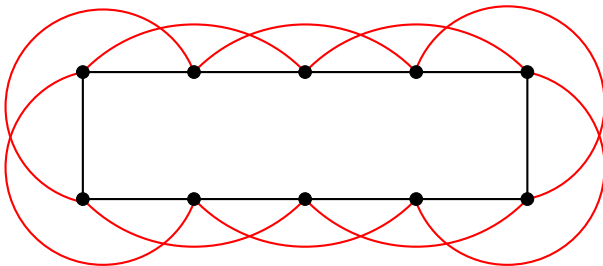


C_{10}

Potência de ciclo

A *k-ésima potência* do ciclo C_n é o grafo simples C_n^k tal que:

- $V(C_n^k) = V(C_n)$;
- $u, v \in V(C_n^k)$ são adjacentes $\iff d_{C_n}(u, v) \leq k$.



$$C_{10}^2$$

Potência de ciclo - Nosso Resultado

Teorema [Luiz, Campos, Dantas, Sasaki]

Toda potência de ciclo C_n^k tem uma $\{1, 2\}$ -rotulação total semiforte.



Potência de ciclo - Nosso Resultado

Teorema [Luiz, Campos, Dantas, Sasaki]

Toda potência de ciclo C_n^k tem uma $\{1, 2\}$ -rotulação total semiforte. $\square$



Usando o fato de que C_n^k é um grafo regular

Teorema [Luiz, Campos, Dantas, Sasaki]

Toda potência de ciclo C_n^k tem uma $\{a, b\}$ -rotulação total semiforte, para $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. $\square$

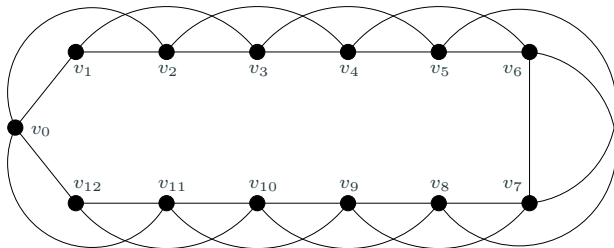
Partição em blocos do $V(C_n^k)$

$$C_{13}^2$$

$$n = 13$$

$$k = 2$$

$$n = \alpha(k + 1) + r$$



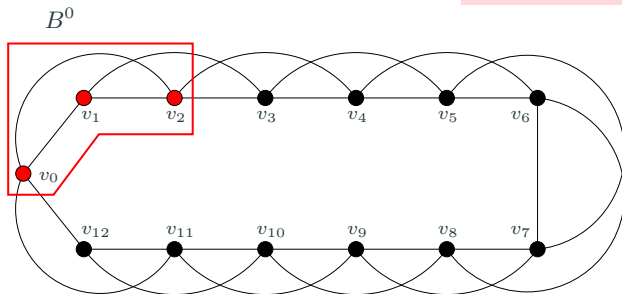
Partição em blocos do $V(C_n^k)$

$$C_{13}^2$$

$$n = 13$$

$$k = 2$$

$$n = \alpha(k + 1) + r$$



Começando no v_0 , e seguindo na ordem circular, particionamos $V(C_n^k)$ em α blocos, cada um com $k + 1$ vértices.

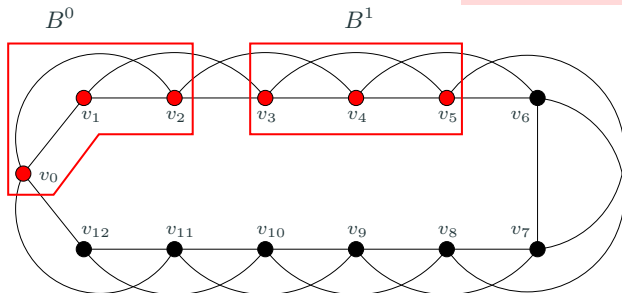
Partição em blocos do $V(C_n^k)$

$$C_{13}^2$$

$$n = 13$$

$$k = 2$$

$$n = \alpha(k + 1) + r$$



Começando no v_0 , e seguindo na ordem circular, particionamos $V(C_n^k)$ em α blocos, cada um com $k + 1$ vértices.

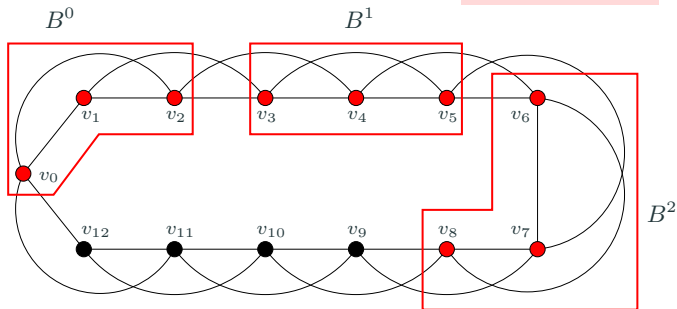
Partição em blocos do $V(C_n^k)$

$$C_{13}^2$$

$$n = 13$$

$$k = 2$$

$$n = \alpha(k + 1) + r$$



Começando no v_0 , e seguindo na ordem circular, particionamos $V(C_n^k)$ em α blocos, cada um com $k + 1$ vértices.

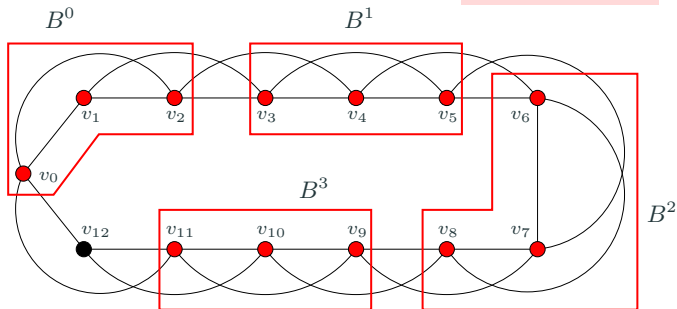
Partição em blocos do $V(C_n^k)$

$$C_{13}^2$$

$$n = 13$$

$$k = 2$$

$$n = \alpha(k + 1) + r$$



Começando no v_0 , e seguindo na ordem circular, particionamos $V(C_n^k)$ em α blocos, cada um com $k + 1$ vértices.

Partição em blocos do $V(C_n^k)$

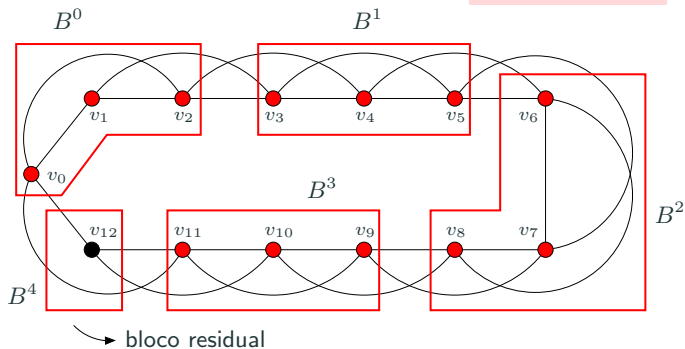
$$C_{13}^2$$

$$n = 13$$

$$k = 2$$

$$\alpha = 4$$

$$n = \alpha(k + 1) + r$$



Os últimos r vértices formam o **bloco residual**.

Partição em blocos do $V(C_n^k)$

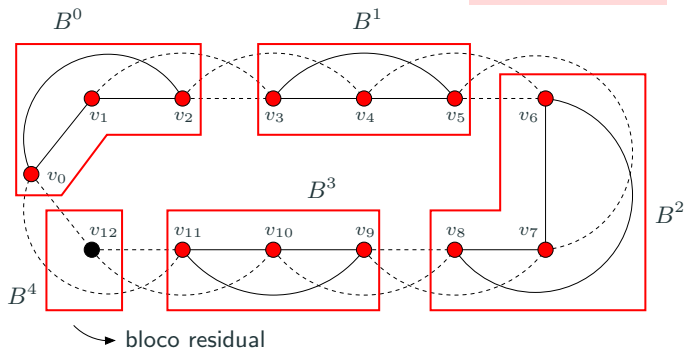
$$C_{13}^2$$

$$n = 13$$

$$k = 2$$

$$\alpha = 4$$

$$n = \alpha(k + 1) + r$$



Aresta de ligação: aresta cujos extremos pertencem a blocos distintos.

Partição em blocos do $V(C_n^k)$

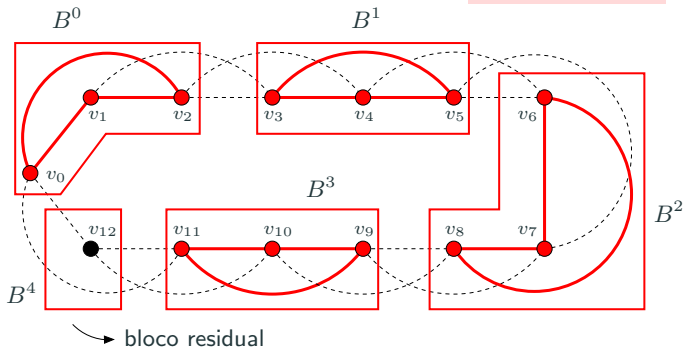
$$C_{13}^2$$

$$n = 13$$

$$k = 2$$

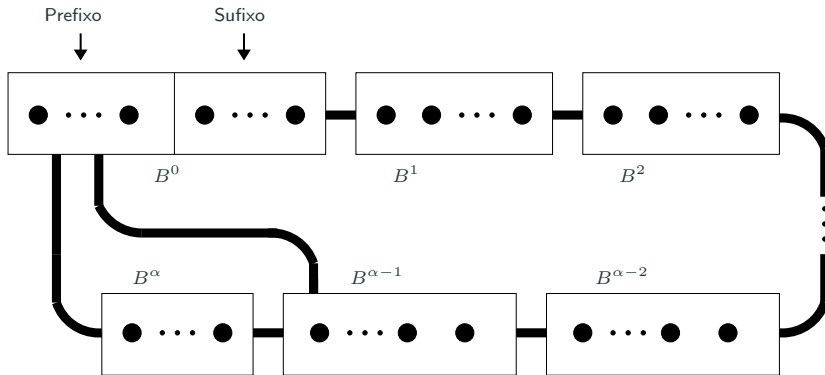
$$\alpha = 4$$

$$n = \alpha(k + 1) + r$$



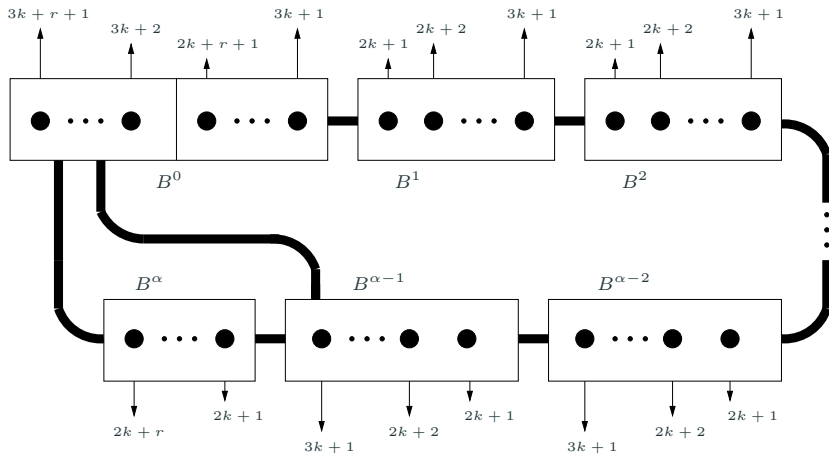
Observação: Cada bloco induz um grafo completo.

Ideia da prova



- Grafo C_n^k , tal que $n = \alpha(k + 1) + r$.

Ideia da prova



- Grafo C_n^k , tal que $n = \alpha(k+1) + r$.



Conclusões

Conjetura

Todo caterpillar com diâmetro pelo menos cinco é 0-rotativo.

Conjetura

Todo caterpillar com diâmetro pelo menos cinco é 0-rotativo.

Provamos para seis famílias de caterpillars, em especial:

- ▶ Caterpillars com diâmetros cinco e seis. **(Feito!)**
- ▶ Algumas famílias de caterpillars com diâmetro pelo menos sete. **(Feito!)**

Conjetura

Todo caterpillar com diâmetro pelo menos cinco é 0-rotativo.

Provamos para seis famílias de caterpillars, em especial:

- ▶ Caterpillars com diâmetros **cinco** e **seis**. **(Feito!)**
- ▶ Algumas famílias de caterpillars com diâmetro pelo menos **sete**. **(Feito!)**
- ▶ Para todo inteiro $d \geq 5$, existem caterpillars 0-rotativos com diâmetro d e número arbitrário de vértices.

Pergunta (Brinkman et al. 2012)

Todas as árvores com $\Delta(G) = 3$, com no mínimo 15 vértices e sem rotulações- α pertencem à família $\mathcal{F}$?

- Lobsters com $\Delta(G) = 3$, sem pernas-Y e com no máximo uma terminação proibida. **(Feito!)**

Problema 1

Todos os caterpillars com diâmetro pelo menos sete, cujos vértices internos são adjacentes a um **número ímpar** de folhas são 0-rotativos?

Problema 2

Para quais lobsters com $\Delta(G) = 3$, sem pernas-Y e com **duas** terminações proibidas nossa técnica pode ser adaptada para provar que eles possuem uma rotulação- α ?

Conclusões — Rotulações semifortes

Classes	$\{a, b\}$ -total semiforte	$\{a, b, c\}$ -aresta semiforte
Grafos multipartidos completos	SIM [Hulgan et al. 2011]	SIM para $0 \leq a < b < c$
Grafos Split	SIM para $0 \leq a < b$	SIM para $0 \leq a < b < c$
Grafos cobipartidos regulares	SIM	SIM
Potências de caminho	SIM para $\{t, 2t\}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	SIM para $\{t, 2t, 3t\}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Potências de ciclo	SIM	SIM para $\{t, 2t, 3t\}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- Conjetura 1,2,3 e Conjetura 1,2
- Pergunta [Hulgan et al. 2016]: Todo grafo simples possui uma $\{a, b\}$ -rotulação total semiforte, para quaisquer dois reais a, b distintos?

Conclusões — Rotulações semifortes

Classes	$\{a, b\}$ -total semiforte	$\{a, b, c\}$ -aresta semiforte
Grafos multipartidos completos	SIM [Hulgan et al. 2011]	SIM para $0 \leq a < b < c$
Grafos Split	SIM para $0 \leq a < b$	SIM para $0 \leq a < b < c$
Grafos cobipartidos regulares	SIM	SIM
Potências de caminho	SIM para $\{t, 2t\}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	SIM para $\{t, 2t, 3t\}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Potências de ciclo	SIM	SIM para $\{t, 2t, 3t\}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- Conjetura 1,2,3 e Conjetura 1,2
- Pergunta [Hulgan et al. 2016]: Todo grafo simples possui uma $\{a, b\}$ -rotulação total semiforte, para quaisquer dois reais a, b distintos?
- Rotulações de Arestas Semiforte $\implies$ Rotulações Detectáveis de Arestas.

Conjetura

Dados quaisquer três números reais a, b, c distintos, todo grafo simples sem componentes conexas isomorfas ao K_2 possui uma $\{a, b, c\}$ -rotulação de arestas semiforte.

Conjetura

Dados quaisquer três números reais a, b, c distintos, todo grafo simples sem componentes conexas isomorfas ao K_2 possui uma $\{a, b, c\}$ -rotulação de arestas semiforte.

Conjetura

Se G é uma potência de ciclo ou potência de caminho, tal que G não é um ciclo nem um grafo completo, então G possui uma $\{1, 2\}$ -rotulação de arestas semiforte.

Apresentações

- (1) VIII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium ([LAGOS 2015](#)), Beberibe, Ceará, Brasil.
- (2) Primeiro Encontro de Teoria da Computação [ETC 2016](#), CSBC, Porto Alegre, Brasil.
- (3) IV Bordeaux Graph Workshop [BGW 2016](#), em Bordeaux, França.
- (4) 17th Colourings, Independence and Domination Workshop ([CID 2017](#)), Piechowice, Polônia.
- (5) II Encontro de Teoria da Computação ([ETC 2017](#)), CSBC, São Paulo, Brasil.



Submetidos:

- A. G. Luiz, C. N. Campos e R. B. Richter. *Some families of 0-rotatable graceful caterpillars*. Submetido para **Discrete Mathematics**. (2017)
- A. G. Luiz, C. N. Campos e S. M. de Almeida. *Neighbour-distinguishing labellings of families of graphs*. Submetido para **Discrete Mathematics**. (2017)

Em fase de submissão:

- A. G. Luiz, C. N. Campos, e R. B. Richter. *On α -labellings of lobsters and trees with a perfect matching*.
- A. G. Luiz, C. N. Campos, S. Dantas e D. Sasaki. *Neighbour-distinguishing labellings of powers of paths and powers of cycles*.

Agradecimentos

CAPES

FAPESP

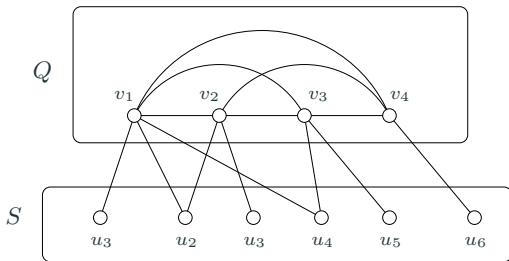
Instituto de Computação - UNICAMP

Obrigado!

Anexos

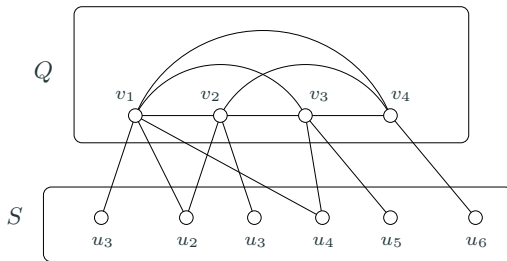
Grafos Split – Rotulação total

- **Grafo split:** um grafo simples G cujo conjunto de vértices $V(G)$ pode ser particionado em uma clique Q e um conjunto independente $S = V(G) \setminus Q$.



Grafos Split – Rotulação total

- **Grafo split:** um grafo simples G cujo conjunto de vértices $V(G)$ pode ser particionado em uma clique Q e um conjunto independente $S = V(G) \setminus Q$.



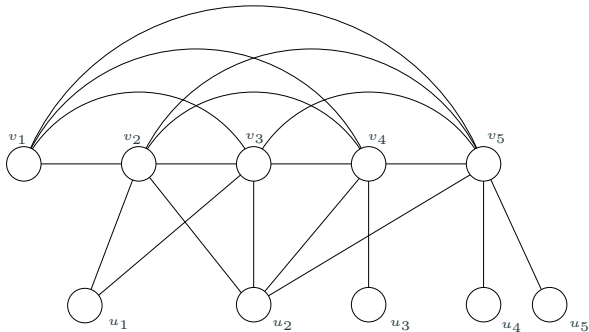
Teorema [Luiz, Campos, de Almeida]

Se G é um grafo split, então G tem uma $\{a, b\}$ -rotulação total semiforte, para $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leq a < b$.



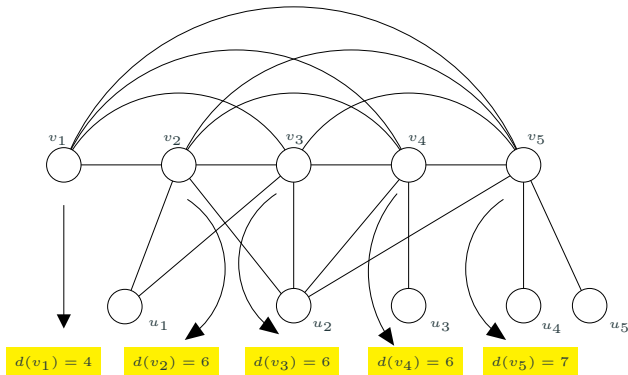
Grafos Split – Ilustração da prova

- Seja G um grafo split com clique maximal Q e conjunto independente S .



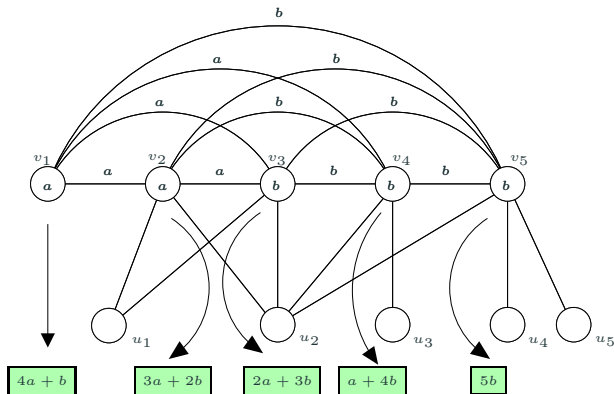
Grafos Split – Ilustração da prova

- Seja G um grafo split com clique maximal Q e conjunto independente S .
- Ajuste a notação tal que $d_G(v_i) \leq d_G(v_{i+1})$, para $1 \leq i \leq |Q| - 1$.



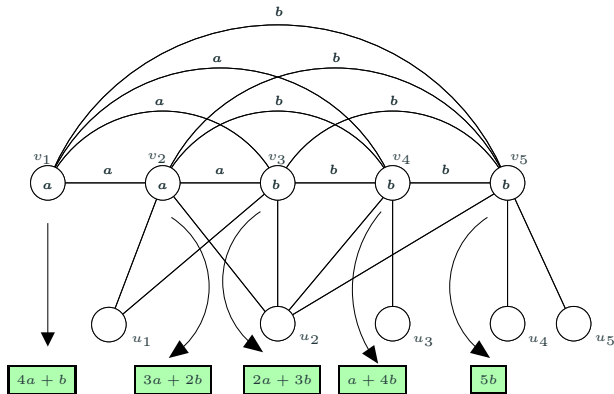
Grafos Split – Ilustração da prova

- **Teorema (Hulgan et al. 2016):** K_n tem uma $\{a, b\}$ -rotulação total semiforte π tal que $C_\pi(v_i) = a(n - i) + ib$, para $1 \leq i \leq n$.



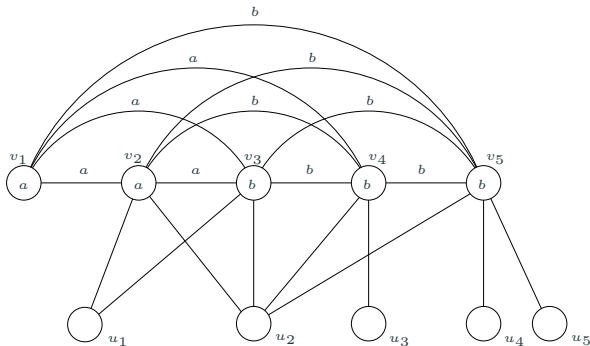
Grafos Split – Ilustração da prova

- **Teorema (Hulgan et al. 2016):** K_n tem uma $\{a, b\}$ -rotulação total semiforte π tal que $C_\pi(v_i) = a(n - i) + ib$, para $1 \leq i \leq n$.
- Logo, $C_\pi(v_i) < C_\pi(v_{i+1})$, para $1 \leq i \leq n$.



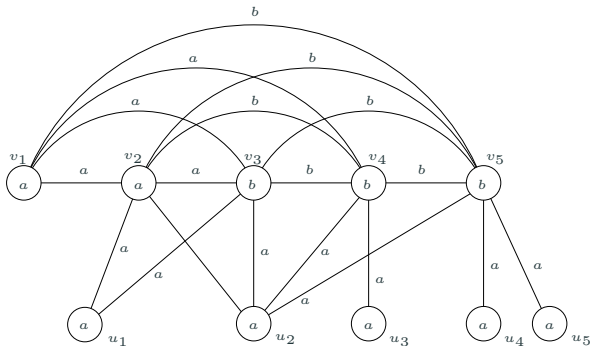
Grafos Split – Ilustração da prova

- Atribua rótulo a a todos os vértices em S e todas as arestas em $E_G[Q, S]$.



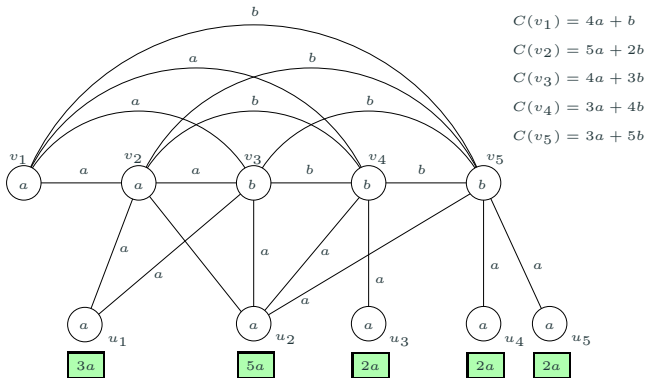
Grafos Split – Ilustração da prova

- Atribua rótulo a a todos os vértices em S e todas as arestas em $E_G[Q, S]$.

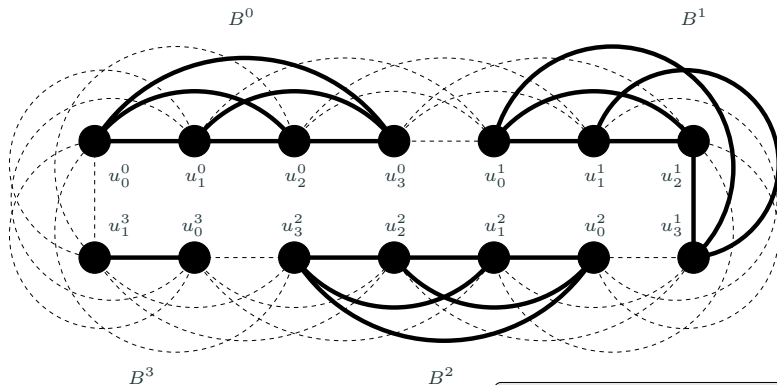


Grafos Split – Ilustração da prova

- Quaisquer dois vértices v_i, v_j , com $i < j$, possuem $C(v_i) < C(v_j)$
- A cor de cada $u_i \in S$ é menor que as cores dos vértices em $N_G(S)$.



Exemplo – Conjetura 1,2 – Família C_n^k



C_{14}^3

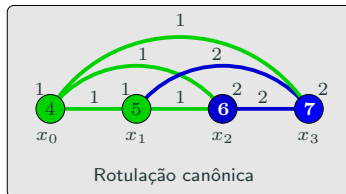
$n = 14$

$k = 3$

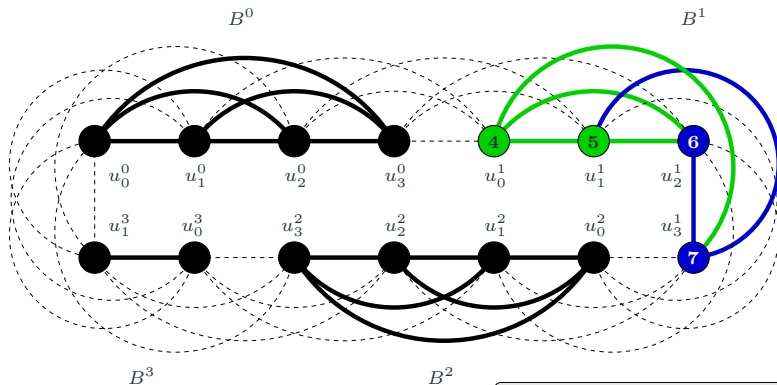
$\alpha = 3$

$r = 2$

- Cada bloco B^j induz um grafo completo com $k + 1$ vértices.



Exemplo – Conjetura 1,2 – Família C_n^k



C_{14}^3

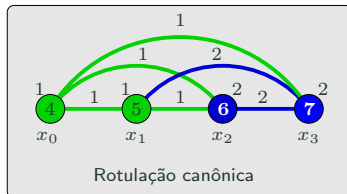
$n = 14$

$k = 3$

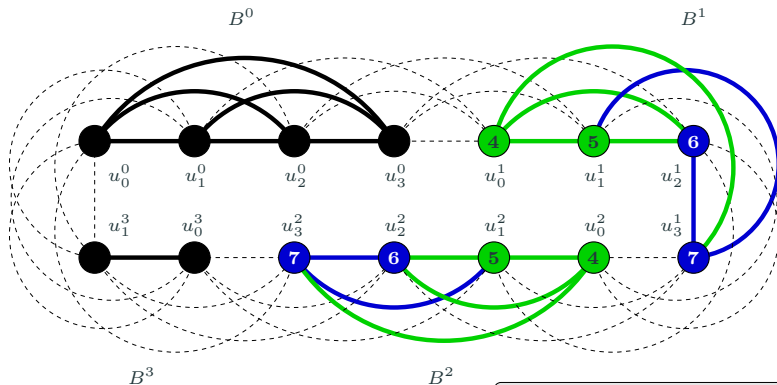
$\alpha = 3$

$r = 2$

- O subgrafo induzido por B^j , com $1 \leq j \leq \alpha - 1$, recebe a rotulação canônica do K_{k+1} .



Exemplo – Conjetura 1,2 – Família C_n^k



C_{14}^3

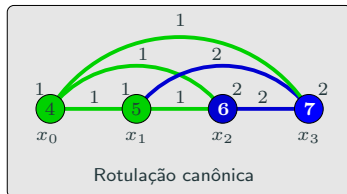
$n = 14$

$k = 3$

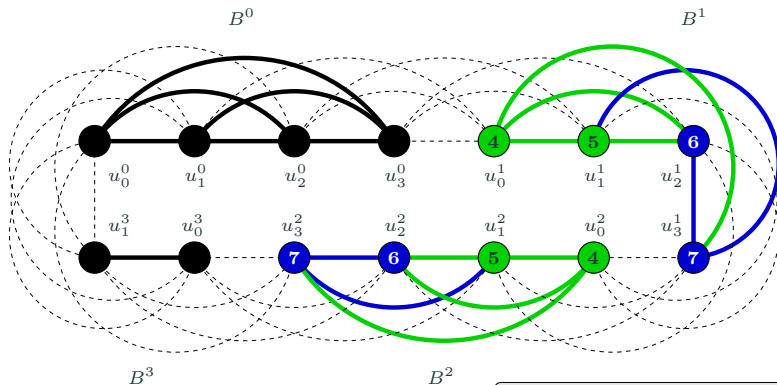
$\alpha = 3$

$r = 2$

- O subgrafo induzido por B^j , com $1 \leq j \leq \alpha - 1$, recebe a rotulação canônica do K_{k+1} .



Exemplo – Conjetura 1,2 – Família C_n^k



C_{14}^3

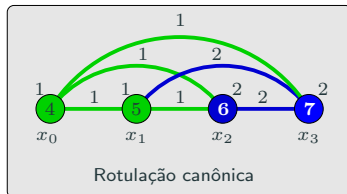
$n = 14$

$k = 3$

$\alpha = 3$

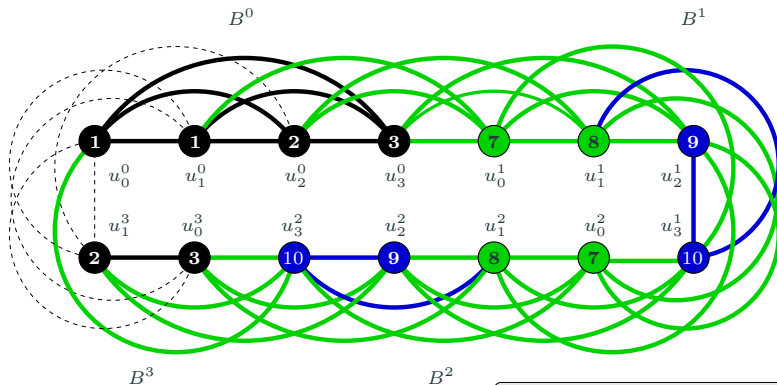
$r = 2$

- Atribua rótulo 1 a cada aresta de ligação que tenha pelo menos um extremo em B^j , $1 \leq j \leq \alpha - 1$.



Rotulação canônica

Exemplo – Conjetura 1,2 – Família C_n^k



$$C_{14}^3$$

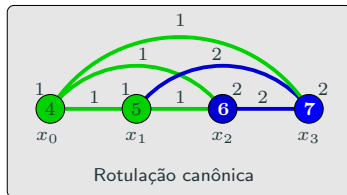
$$n = 14$$

$$k = 3$$

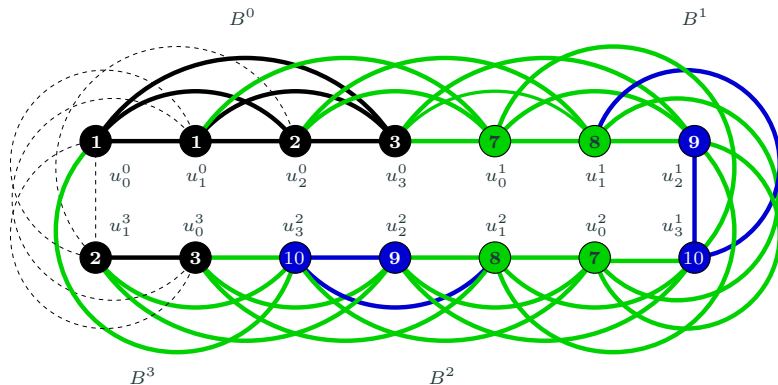
$$\alpha = 3$$

$$r = 2$$

- Atribua rótulo 1 a cada aresta de ligação que tenha pelo menos um extremo em B^j , $1 \leq j \leq \alpha - 1$.



Exemplo – Conjetura 1,2 – Família C_n^k



$$C_{14}^3$$

$$n = 14$$

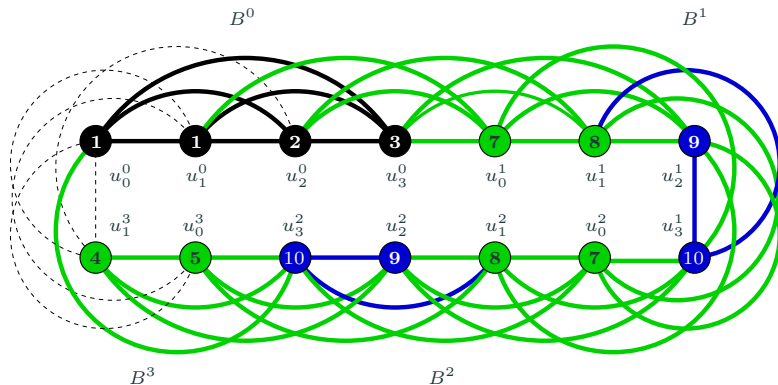
$$k = 3$$

$$\alpha = 3$$

$$r = 2$$

- Cada elemento de $G[B^\alpha]$ recebe rótulo 1.

Exemplo – Conjetura 1,2 – Família C_n^k



$$C_{14}^3$$

$$n = 14$$

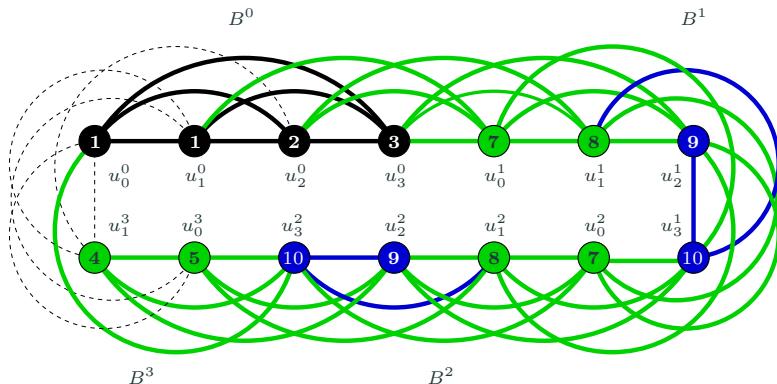
$$k = 3$$

$$\alpha = 3$$

$$r = 2$$

- Cada elemento de $G[B^\alpha]$ recebe rótulo 1.

Exemplo – Conjetura 1,2 – Família C_n^k



C_{14}^3

$n = 14$

$k = 3$

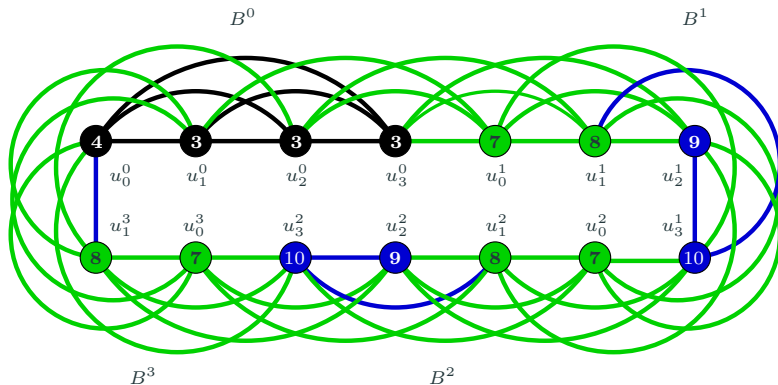
$\alpha = 3$

$r = 2$

- Arestas cujos extremos estejam em $B^\alpha \cup B^0$ são rotuladas como a seguir:

$$\pi(u_i^\alpha u_j^0) = \begin{cases} 2, & \text{if } 0 \leq j \leq i - 1; \\ 1, & \text{if } i \leq j \leq k - r + i \end{cases}$$

Exemplo – Conjetura 1,2 – Família C_n^k



$$C_{14}^3$$

$$n = 14$$

$$k = 3$$

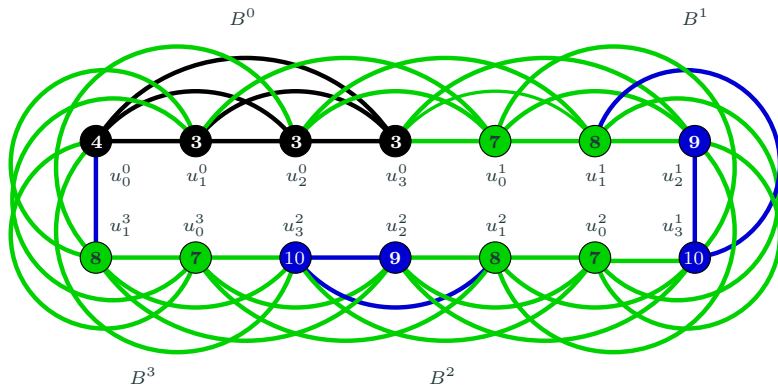
$$\alpha = 3$$

$$r = 2$$

- Arestas cujos extremos estejam em $B^\alpha \cup B^0$ são rotuladas como a seguir:

$$\pi(u_i^\alpha u_j^0) = \begin{cases} 2, & \text{if } 0 \leq j \leq i - 1; \\ 1, & \text{if } i \leq j \leq k - r + i \end{cases}$$

Exemplo – Conjetura 1,2 – Família C_n^k



$$C_{14}^3$$

$$n = 14$$

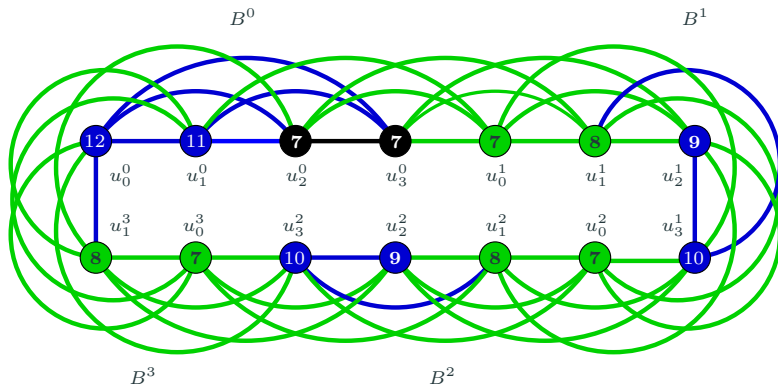
$$k = 3$$

$$\alpha = 3$$

$$r = 2$$

- Os primeiros r vértices do B^0 e suas arestas incidentes cujo outro extremo esteja também em B_0 recebem rótulo 2.

Exemplo – Conjetura 1,2 – Família C_n^k



$$C_{14}^3$$

$$n = 14$$

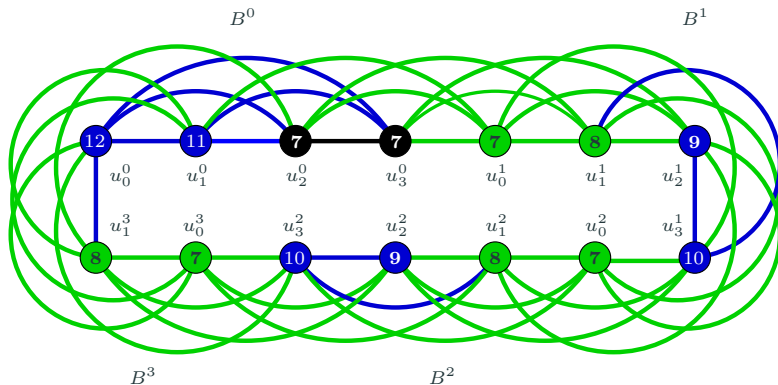
$$k = 3$$

$$\alpha = 3$$

$$r = 2$$

- Os primeiros r vértices do B^0 e suas arestas incidentes cujo outro extremo esteja também em B_0 recebem rótulo 2.

Exemplo – Conjetura 1,2 – Família C_n^k



$$C_{14}^3$$

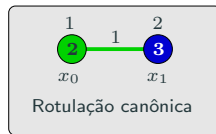
$$n = 14$$

$$k = 3$$

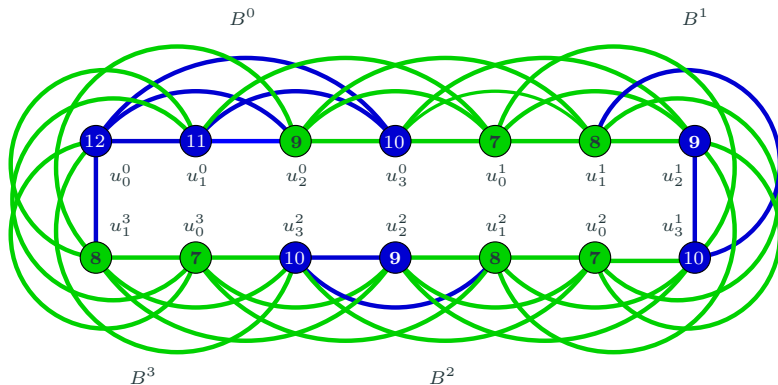
$$\alpha = 3$$

$$r = 2$$

- Por fim, o subgrafo induzido pelos últimos $k - r + 1$ vértices do B^0 recebem a rotulação canônica do K_{k-r+1} .



Exemplo – Conjetura 1,2 – Família C_n^k



$$C_{14}^3$$

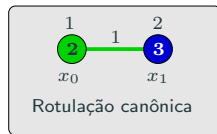
$$n = 14$$

$$k = 3$$

$$\alpha = 3$$

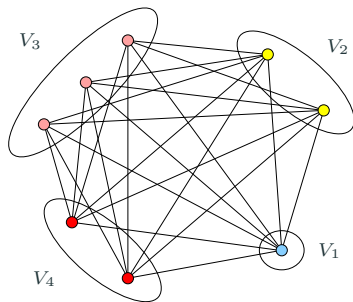
$$r = 2$$

- Por fim, o subgrafo induzido pelos últimos $k - r + 1$ vértices do B^0 recebem a rotulação canônica do K_{k-r+1} .



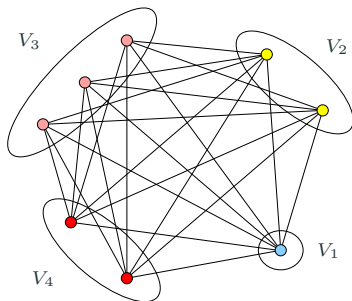
Grafos multipartidos completos – Rotulação de arestas

Grafo multipartido completo:



Grafos multipartidos completos – Rotulação de arestas

Grafo multipartido completo:

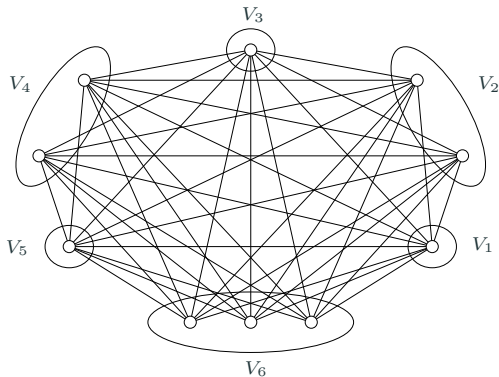


Teorema [Luiz, C. N. Campos, S. M. de Almeida]

Se G é um grafo multipartido completo com $r \geq 3$ partes, então G tem uma $\{a, b, c\}$ -rotulação de arestas semiforte, para $a, b, c \in \mathbb{R}$, $0 \leq a < b < c$. $\square$

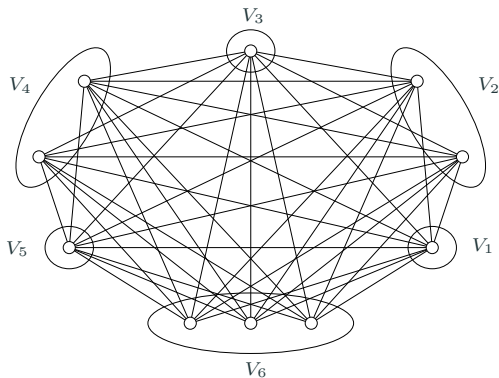
Multipartidos completos - Ilustração da prova

- Seja G um grafo multipartido completo com $r \geq 3$ partes $V_1, \dots, V_r$.



Multipartidos completos - Ilustração da prova

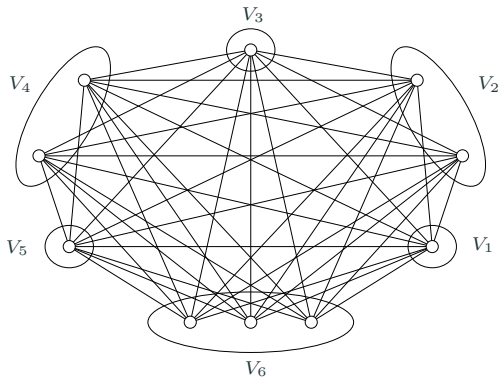
- Ajuste a notação tal que:
 - $|V_1| \leq |V_2|$;
 - $|V_{i-2}| \leq |V_i|$, i par, $i > 2$;
 - $|V_i| \leq |V_{i-2}|$, i ímpar, $i > 1$.



$$|V_5| \leq |V_3| \leq |V_1| \leq |V_2| \leq |V_4| \leq |V_6|$$

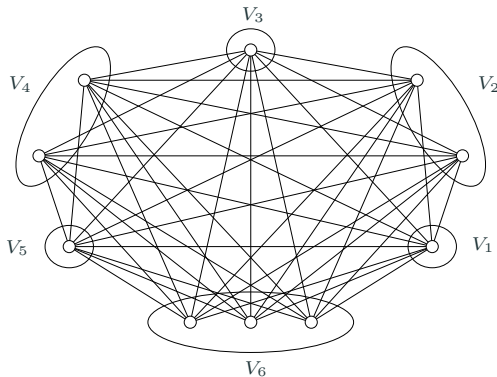
Multipartidos completos - Ilustração da prova

- Prova construtiva.
- Provamos os casos $r = 3$ e $r = 4$ separadamente.
- Para $r \geq 5$, provamos por indução em r .



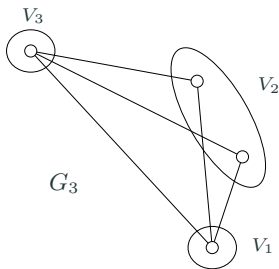
Multipartidos completos - Ilustração da prova

- v^i : um vértice arbitrário da parte V_i .
- $C(v^i)$: a cor do vértice $v^i \in V_i$.
- G_i : o subgrafo induzido pelo conjunto $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_i$.



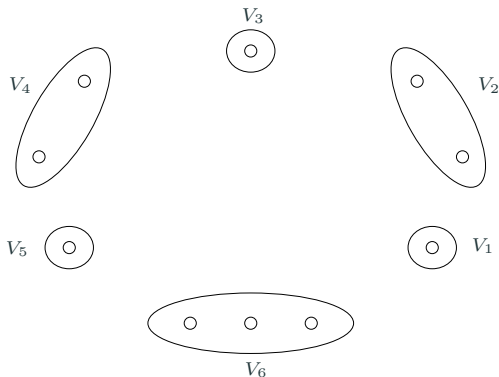
Multipartidos completos - Ilustração da prova

- v^i : um vértice arbitrário da parte V_i .
- $C(v^i)$: a cor do vértice $v^i \in V_i$.
- G_i : o subgrafo induzido pelo conjunto $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_i$.



Multipartidos completos - Ilustração da prova

- Para rotular G_3 , atribua rótulo a às arestas $E_G[V_1, V_2]$, rótulo c à $E_G[V_1, V_3]$, e rótulo b à $E_G[V_2, V_3]$.

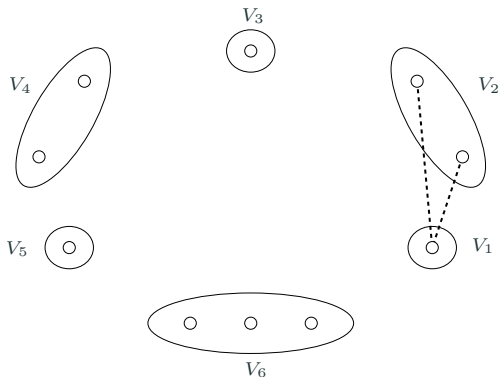


Legenda:

- rótulo a
- rótulo b
- rótulo c

Multipartidos completos - Ilustração da prova

- Para rotular G_3 , atribua rótulo a às arestas $E_G[V_1, V_2]$, rótulo c à $E_G[V_1, V_3]$, e rótulo b à $E_G[V_2, V_3]$.

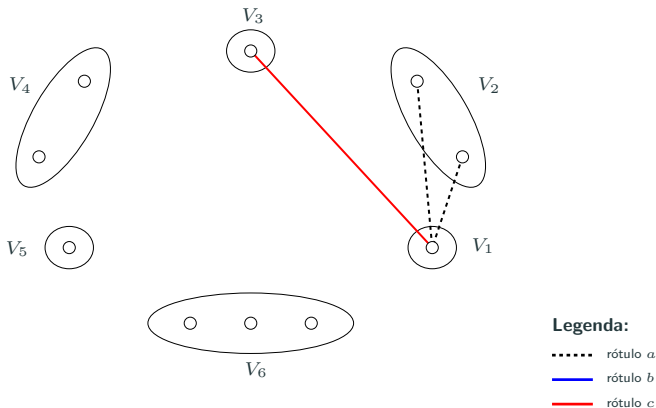


Legenda:

- rótulo a
- (blue) — rótulo b
- (red) — rótulo c

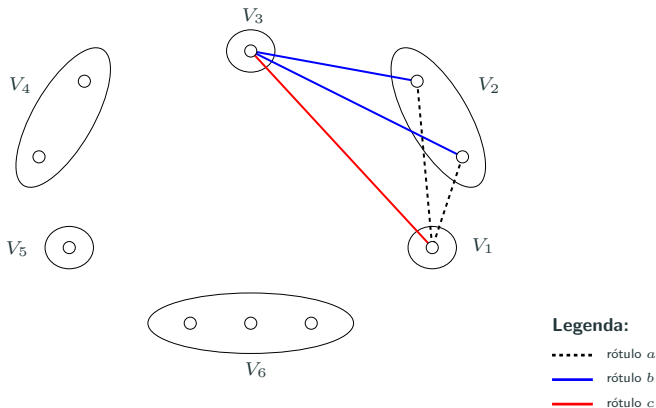
Multipartidos completos - Ilustração da prova

- Para rotular G_3 , atribua rótulo a às arestas $E_G[V_1, V_2]$, rótulo c à $E_G[V_1, V_3]$, e rótulo b à $E_G[V_2, V_3]$.



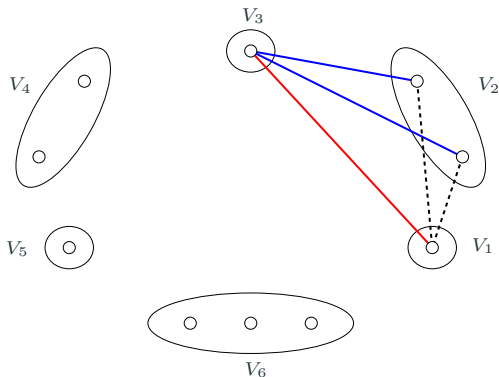
Multipartidos completos - Ilustração da prova

- Para rotular G_3 , atribua rótulo a às arestas $E_G[V_1, V_2]$, rótulo c à $E_G[V_1, V_3]$, e rótulo b à $E_G[V_2, V_3]$.



Multipartidos completos - Ilustração da prova

- $c(v^2) < c(v^1) < c(v^3)$ pois
 - $a|V_1| + b|V_3| < a|V_2| + c|V_3| < b|V_2| + c|V_1|$.

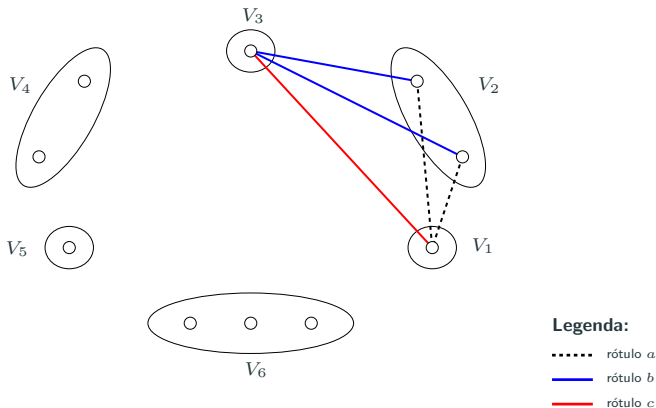


Legenda:

- rótulo a
- (blue) — rótulo b
- (red) — rótulo c

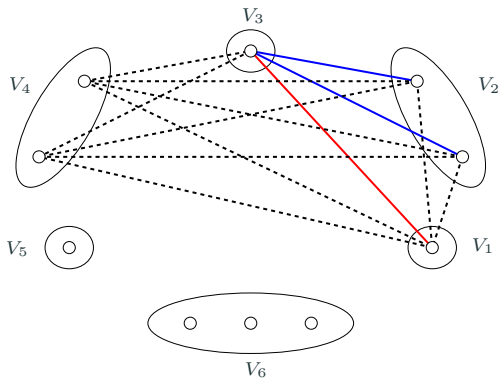
Multipartidos completos - Ilustração da prova

- Para rotular G_4 , atribua rótulo a às arestas $E_G[V_4, V(G_3)]$.



Multipartidos completos - Ilustração da prova

- Ainda temos $c(v^2) < c(v^1) < c(v^3)$.
- $c(v^4) < c(v^2)$ pois $a|V_1| + a|V_2| + a|V_3| < a|V_1| + a|V_4| + b|V_3|$.

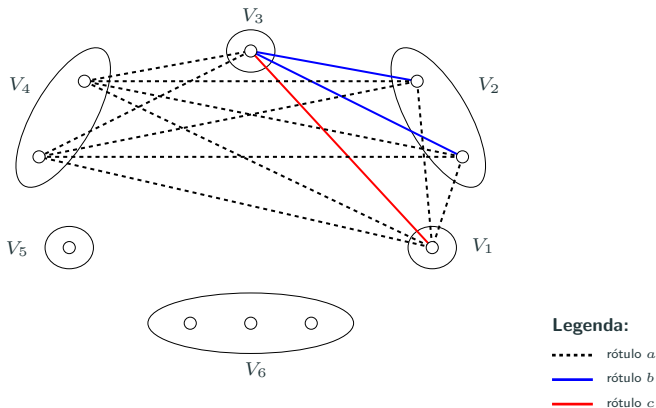


Legenda:

- rótulo a
- (blue) — rótulo b
- (red) — rótulo c

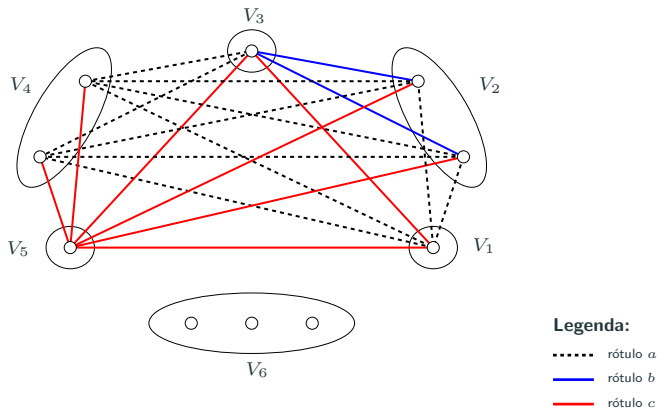
Multipartidos completos - Ilustração da prova

- Para $i \geq 5$, se i é ímpar, atribua rótulo c às arestas $E_G[V_i, V(G_{i-1})]$.
- Para $i \geq 5$, se i é par, atribua rótulo a às arestas $E_G[V_i, V(G_{i-1})]$.



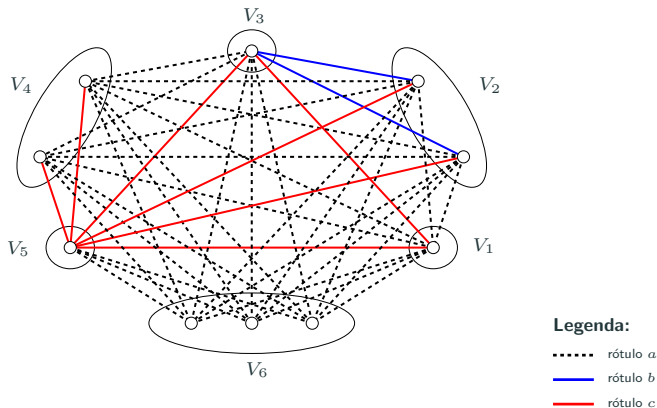
Multipartidos completos - Ilustração da prova

- Para $i \geq 5$, se i é ímpar, atribua rótulo c às arestas $E_G[V_i, V(G_{i-1})]$.
- Para $i \geq 5$, se i é par, atribua rótulo a às arestas $E_G[V_i, V(G_{i-1})]$.



Multipartidos completos - Ilustração da prova

- Para $i \geq 5$, se i é ímpar, atribua rótulo c às arestas $E_G[V_i, V(G_{i-1})]$.
- Para $i \geq 5$, se i é par, atribua rótulo a às arestas $E_G[V_i, V(G_{i-1})]$.

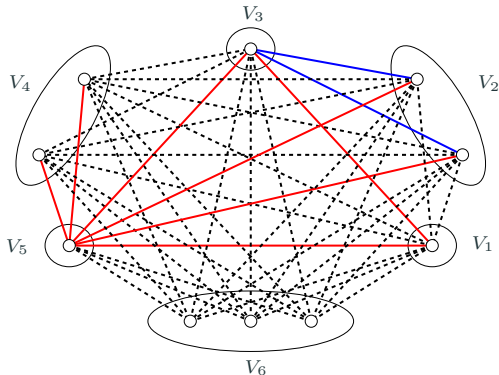


Multipartidos completos - Ilustração da prova

$$|V_6| \geq |V_4| \geq |V_2| \geq |V_1| \geq |V_3| \geq |V_5|$$

$$d(v^6) = 7 \leq d(v^4) = 8 \leq d(v^2) = 8 \leq d(v^1) = 9 \leq d(v^3) = 9 \leq d(v^5) = 9$$

$$c(v^6) < c(v^4) < c(v^2) < c(v^1) < c(v^3) < c(v^5)$$

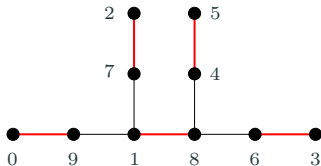


Legenda:

- rótulo a
- rótulo b
- rótulo c

Rotulação fortemente graciosa

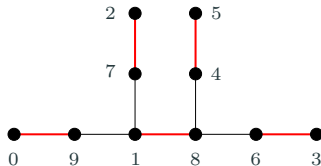
- Seja T uma árvore com emparelhamento perfeito M .
- Uma rotulação f de T é **fortemente graciosa** se:
 - ▶ f é graciosa e para toda aresta $uv \in M$, $f(u) + f(v) = |E(T)|$.



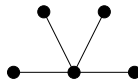
Árvore T com 9 arestas

Rotulação fortemente graciosa

- Seja T uma árvore com emparelhamento perfeito M .
- Uma rotulação f de T é **fortemente graciosa** se:
 - ▶ f é graciosa e para toda aresta $uv \in M$, $f(u) + f(v) = |E(T)|$.



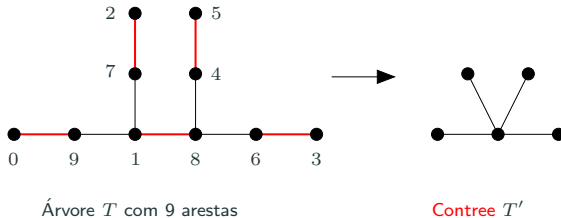
Árvore T com 9 arestas



Contree T'

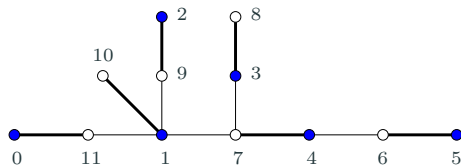
Rotulação fortemente graciosa

- Seja T uma árvore com emparelhamento perfeito M .
- Uma rotulação f de T é **fortemente graciosa** se:
 - ▶ f é graciosa e para toda aresta $uv \in M$, $f(u) + f(v) = |E(T)|$.

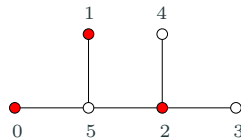


- [Broersma e Hoede 1999]: Toda árvore é graciosa $\Leftrightarrow$ toda árvore com emparelhamento perfeito é fortemente graciosa.

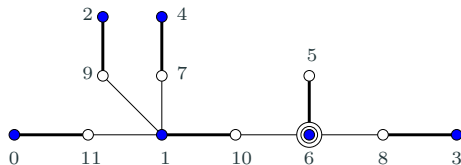
Rotulação fortemente- α



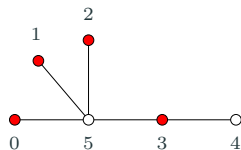
Rotulação fortemente graciosa + rotulação- α



Contree com rotulação- α

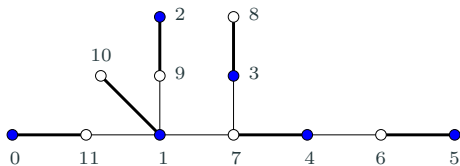


Rotulação fortemente graciosa $\neq$ rotulação- α

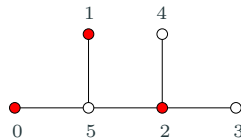


Contree com rotulação- α

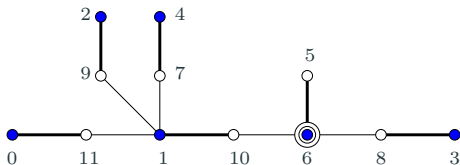
Rotulação fortemente- α



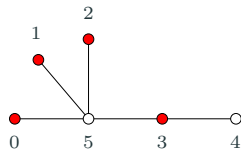
Rotulação fortemente graciosa + rotulação- α



Contree com rotulação- α



Rotulação fortemente graciosa $\neq$ rotulação- α



Contree com rotulação- α

Rotulação fortemente- α : É uma rotulação fortemente graciosa que também é uma rotulação- α .

Nossos resultados

Teorema [Luiz, C. N. Campos e R. B. Richter]

Seja T uma árvore com emparelhamento perfeito e seja T' sua contree. Então, T é fortemente- $\alpha \iff T'$ é balanceada e tem uma rotulação- α . $\square$

Teorema [Luiz, C. N. Campos e R. B. Richter]

Seja G um lobster com emparelhamento perfeito. Se a contree de G for balanceada, então G tem uma rotulação- α . $\square$

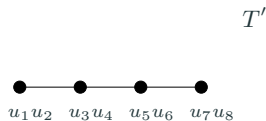
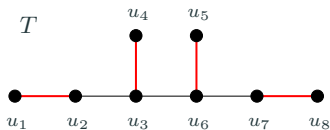
Caterpillars com emparelhamento perfeito

Teorema [Luiz, C. N. Campos e R. B. Richter]

Todo caterpillar com emparelhamento perfeito é 0-rotativo.



Demonstração:

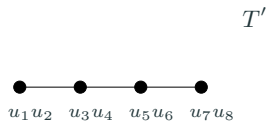
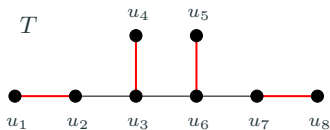


Caterpillars com emparelhamento perfeito

Teorema [Luiz, C. N. Campos e R. B. Richter]

Todo caterpillar com emparelhamento perfeito é 0-rotativo. □

Demonstração:



► T' é um caminho.

Caterpillars com emparelhamento perfeito

Teorema [Luiz, C. N. Campos e R. B. Richter]

Todo caterpillar com emparelhamento perfeito é 0-rotativo. □

Demonstração:



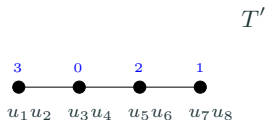
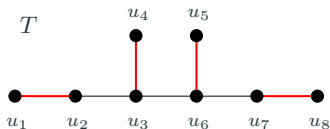
- ▶ T' é um caminho.
- ▶ [Rosa 1967]: Todo caminho é 0-rotativo.

Caterpillars com emparelhamento perfeito

Teorema [Luiz, C. N. Campos e R. B. Richter]

Todo caterpillar com emparelhamento perfeito é 0-rotativo. □

Demonstração:



► T' é um caminho.

► [Rosa 1967]: Todo caminho é 0-rotativo.

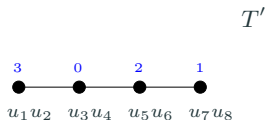
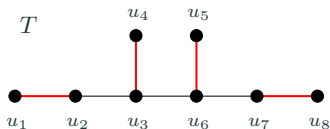
} T' é 0-rotativa.

Caterpillars com emparelhamento perfeito

Teorema [Luiz, C. N. Campos e R. B. Richter]

Todo caterpillar com emparelhamento perfeito é 0-rotativo. □

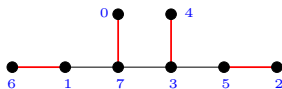
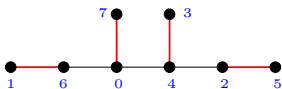
Demonstração:



► T' é um caminho.

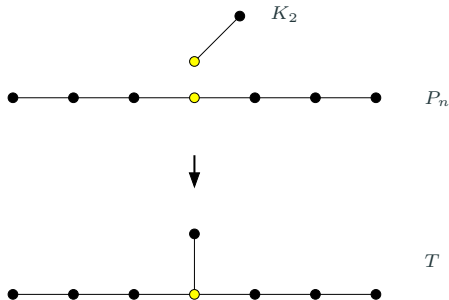
► [Rosa 1967]: Todo caminho é 0-rotativo.

} T' é 0-rotativa.



[Broersma e Hoede 1999]

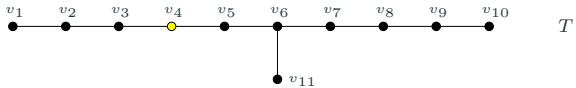
Identificação do P_n com K_2



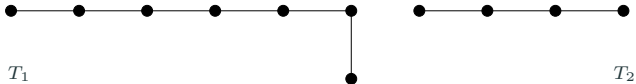
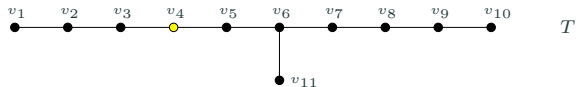
Teorema [Luiz, C. N. Campos e R. B. Richter]

Se T é o caterpillar obtido a partir da identificação de um vértice do K_2 com um vértice central do P_n , então T é 0-rotativo. □

Identificação do P_n com K_2

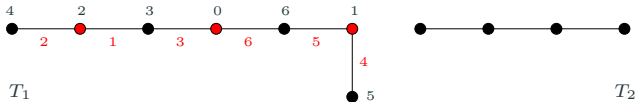
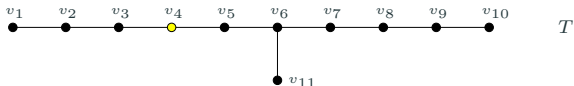


Identificação do P_n com K_2



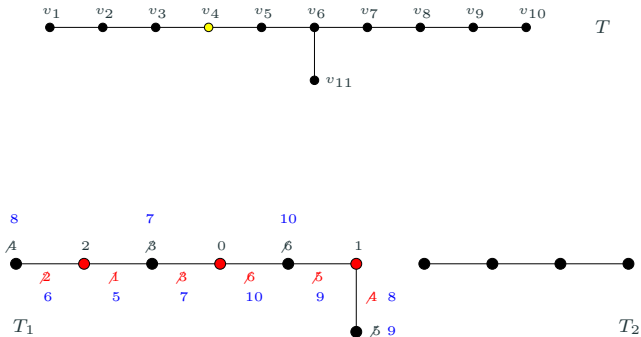
► Inicialmente, removemos a aresta v_6v_7 .

Identificação do P_n com K_2



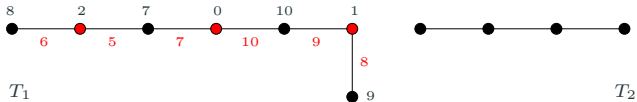
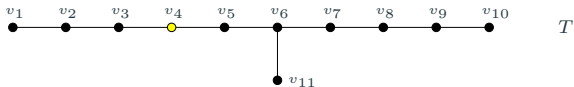
- Inicialmente, removemos a aresta v_6v_7 .
- Rotulamos T_1 com uma rotulação graciosa especial.

Identificação do P_n com K_2



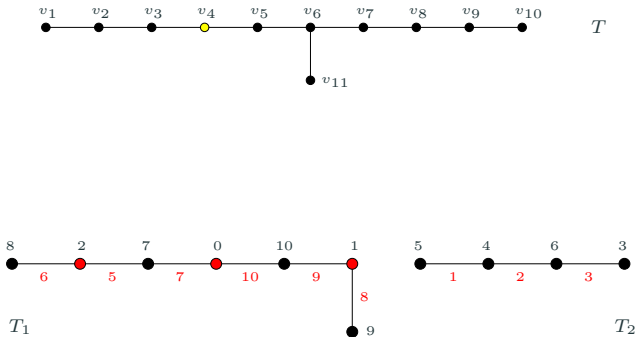
- Inicialmente, removemos a aresta v_6v_7 .
- Rotulamos T_1 com uma rotulação graciosa especial.

Identificação do P_n com K_2



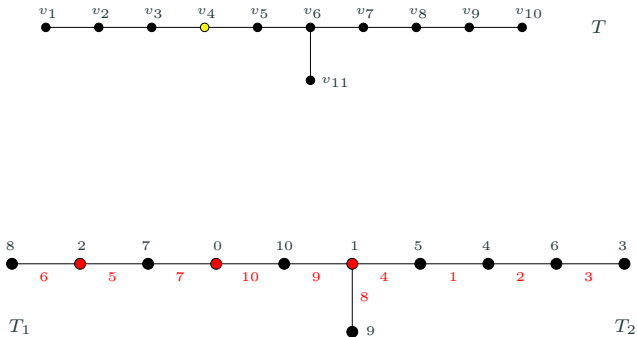
- ▶ 3, 4, 5, 6 não aparecem nos vértices de T_1 .
- ▶ 1, 2, 3, 4 não são induzidos nas arestas de T_1 .

Identificação do P_n com K_2



- $3, 4, 5, 6$ não aparecem nos vértices de T_1 .
- $1, 2, 3, 4$ não são induzidos nas arestas de T_1 .

Identificação do P_n com K_2



- ▶ 3, 4, 5, 6 não aparecem nos vértices de T_1 .
- ▶ 1, 2, 3, 4 não são induzidos nas arestas de T_1 .

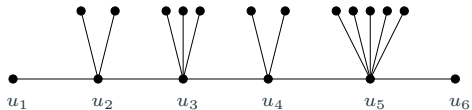
Caterpillars com Diâmetro 5

Teorema [Luiz, Campos e Richter]

Todo caterpillar com diâmetro cinco é 0-rotativo.



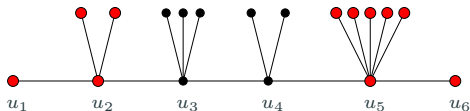
Caterpillars com diâmetro cinco - Exemplo



T

T tem 17 arestas

Caterpillars com diâmetro cinco - Exemplo



T

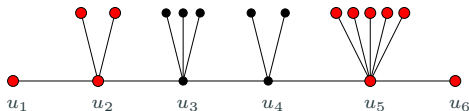
T tem 17 arestas

Teorema [Rosa 1967]

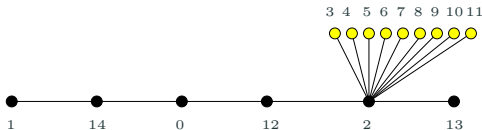
Seja T um caterpillar e seja $v \in V(T)$ tal que v é adjacente a uma folha da base de T ou v é uma folha da base de T . Então, T tem uma rotulação graciosa f com $f(v) = 0$.



Caterpillars com diâmetro cinco - Exemplo



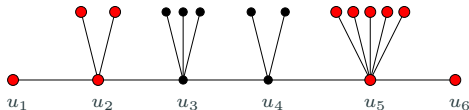
T
 T tem 17 arestas



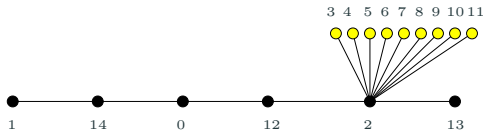
T'

- k = número de folhas adjacentes ao vértice $u_3 \in V(T)$.
- Seja T' uma árvore modelo com $|E(T)| - k$ arestas.

Caterpillars com diâmetro cinco - Exemplo



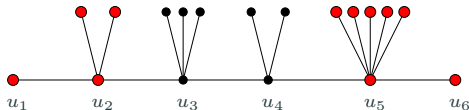
T
 T tem 17 arestas



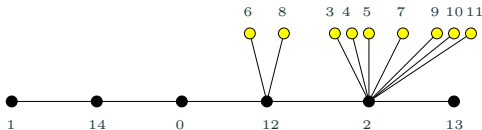
T'

- k = número de folhas adjacentes ao vértice $u_3 \in V(T)$.
- Seja T' uma árvore modelo com $|E(T)| - k$ arestas.
- **Regra de transferência:** $f(u_1) + f(u_2) = f(u) + f(v)$.

Caterpillars com diâmetro cinco - Exemplo



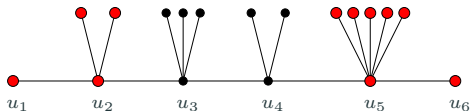
T
 T tem 17 arestas



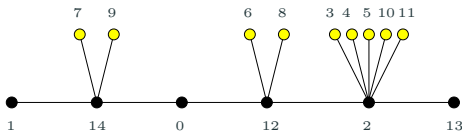
T'

- k = número de folhas adjacentes ao vértice $u_3 \in V(T)$.
- Seja T' uma árvore modelo com $|E(T)| - k$ arestas.
- **Regra de transferência:** $f(u_1) + f(u_2) = f(u) + f(v)$.

Caterpillars com diâmetro cinco - Exemplo



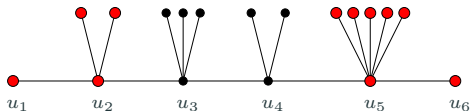
T
 T tem 17 arestas



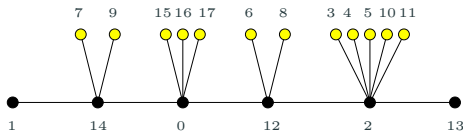
T'

- k = número de folhas adjacentes ao vértice $u_3 \in V(T)$.
- Seja T' uma árvore modelo com $|E(T)| - k$ arestas.
- **Regra de transferência:** $f(u_1) + f(u_2) = f(u) + f(v)$.

Caterpillars com diâmetro cinco - Exemplo



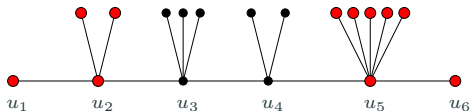
T
 T tem 17 arestas



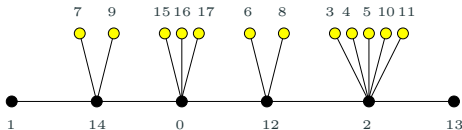
T'

- Adicionamos 3 novas folhas ao vértice u_3 com rótulos 15, 16, 17.

Caterpillars com diâmetro cinco - Exemplo



T
 T tem 17 arestas

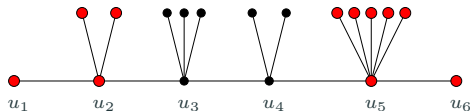


T'

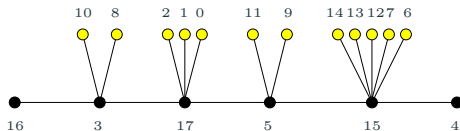
- Adicionamos 3 novas folhas ao vértice u_3 com rótulos 15, 16, 17.
- Por fim, usando a rotulação complementar $\bar{f}$.



Caterpillars com diâmetro cinco - Exemplo



T
 T tem 17 arestas



- Adicionamos 3 novas folhas ao vértice u_3 com rótulos 15, 16, 17.
- Por fim, usando a rotulação complementar $\bar{f}$.

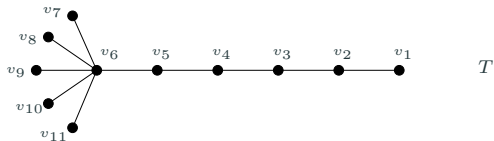


Identificação de caminho e estrela

Teorema [Luiz, Campos e Richter]

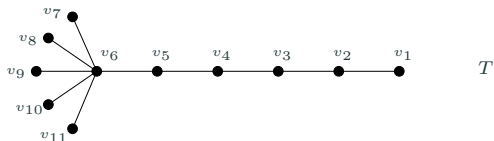
Se T é o caterpillar obtido a partir da identificação de uma folha da estrela $K_{1,s-1}$ com uma folha do P_n , $n \geq 3$ e $s \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, então T é 0-rotativo. $\square$

Identificação de caminho e estrela



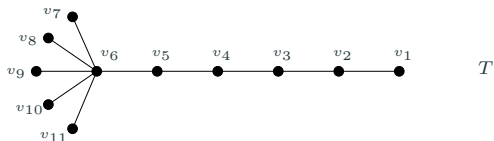
- T obtido pela identificação de uma folha do P_5 com uma folha da estrela $K_{1,6}$.

Identificação de caminho e estrela



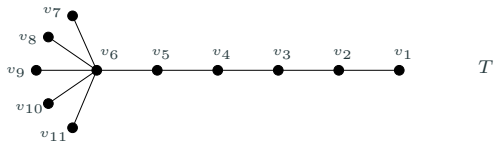
- **Teorema[Rosa 1967]:** Seja T um caterpillar e $v \in V(T)$ tal que v é uma folha da base de T ou é adjacente a uma folha da base de T . Então, T tem uma rotulação graciosa f tal que $f(v) = 0$.

Identificação de caminho e estrela



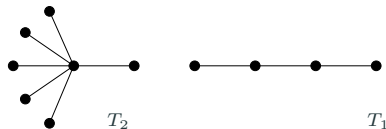
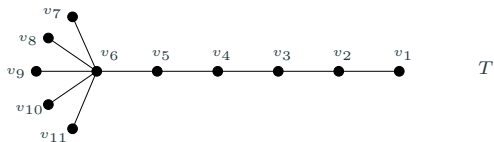
- **Teorema[Rosa 1967]:** Seja T um caterpillar e $v \in V(T)$ tal que v é uma folha da base de T ou é adjacente a uma folha da base de T . Então, T tem uma rotulação graciosa f tal que $f(v) = 0$.
- vértices $v_1, v_2, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11} \implies$ **Resolvido**.

Identificação de caminho e estrela



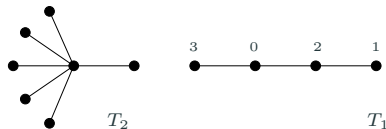
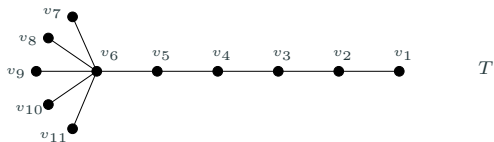
- **Exemplo:** Vamos construir uma rotulação graciosa f de T tal que $f(v_3) = 0$.

Identificação de caminho e estrela



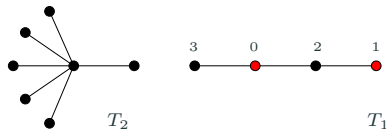
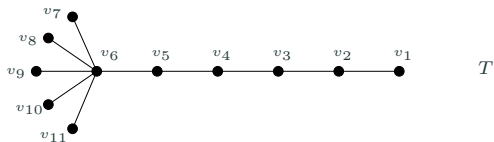
- **Exemplo:** Vamos construir uma rotulação graciosa f de T tal que $f(v_3) = 0$.
- Inicialmente, removemos a aresta v_4v_5 , obtendo duas subárvores T_1 e T_2 .

Identificação de caminho e estrela



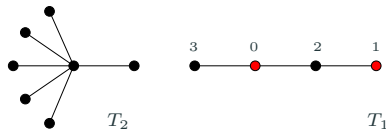
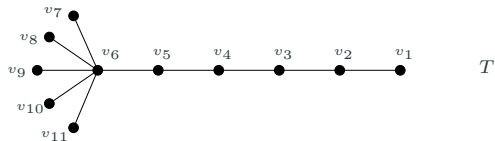
- Construímos uma α -rotulação f_1 de T_1 tal que $f_1(v_3) = 0$.
- f_1 determina uma bipartição $\{V_1, V_2\}$ de T_1 tal que os rótulos de V_1 são menores que os rótulos de V_2 .

Identificação de caminho e estrela



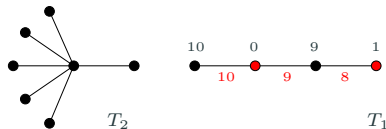
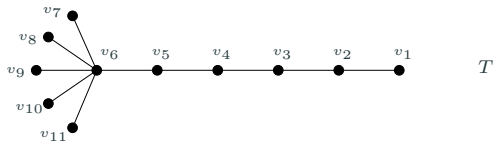
- Construímos uma α -rotulação f_1 de T_1 tal que $f_1(v_3) = 0$.
- f_1 determina uma bipartição $\{V_1, V_2\}$ de T_1 tal que os rótulos de V_1 são menores que os rótulos de V_2 .

Identificação de caminho e estrela



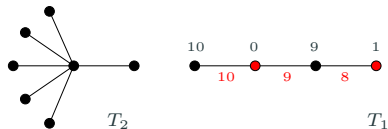
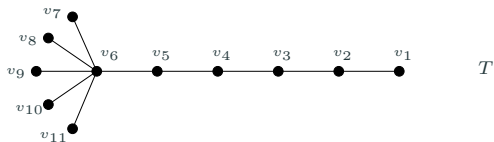
- Adicionamos $+7$ aos rótulos dos vértices do V_2 .

Identificação de caminho e estrela



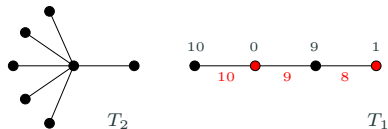
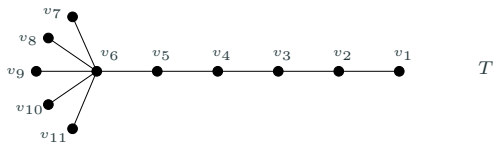
- Adicionamos +7 aos rótulos dos vértices do V_2 .

Identificação de caminho e estrela



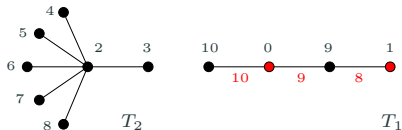
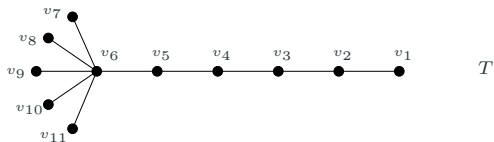
- Os rótulos $2, 3, \dots, 8$ não são usados na rotulação dos vértices de T_1 .
- Os rótulos $1, 2, \dots, 7$ não são induzidos nas arestas de T_1 .

Identificação de caminho e estrela



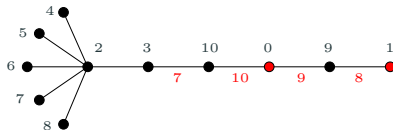
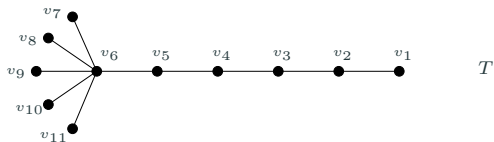
- Os rótulos $2, 3, \dots, 8$ não são usados na rotulação dos vértices de T_1 .
- Os rótulos $1, 2, \dots, 7$ não são induzidos nas arestas de T_1 .
- Construímos uma rotulação f_2 de T_2 que utiliza esses rótulos.

Identificação de caminho e estrela



- Os rótulos $2, 3, \dots, 8$ não são usados na rotulação dos vértices de T_1 .
- Os rótulos $1, 2, \dots, 7$ não são induzidos nas arestas de T_1 .
- Construímos uma rotulação f_2 de T_2 que utiliza esses rótulos.

Identificação de caminho e estrela

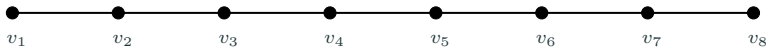


- Os rótulos $2, 3, \dots, 8$ não são usados na rotulação dos vértices de T_1 .
- Os rótulos $1, 2, \dots, 7$ não são induzidos nas arestas de T_1 .
- Construímos uma rotulação f_2 de T_2 que utiliza esses rótulos.

Potência de caminho

A *k-ésima potência* do caminho P_n é o grafo simples P_n^k tal que:

- $V(P_n^k) = V(P_n)$;
- $u, v \in V(P_n^k)$ são adjacentes $\iff d_{P_n}(u, v) \leq k$.

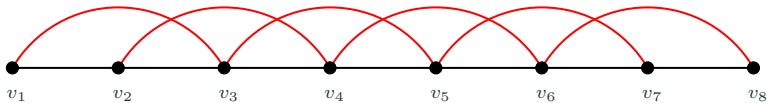


P_8

Potência de caminho

A *k-ésima potência* do caminho P_n é o grafo simples P_n^k tal que:

- $V(P_n^k) = V(P_n)$;
- $u, v \in V(P_n^k)$ são adjacentes $\iff d_{P_n}(u, v) \leq k$.



P_8^2

Theorem

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $0 \leq a < b < c$.

Seja G um grafo split sem componentes conexas isomorfas ao K_2 , com uma clique maximal Q e um conjunto independente $S = V(G) \setminus Q$.

- Se $|Q| = 2$, então G tem uma $\{a, b\}$ -rotulação de arestas semiforte.
- Se $|Q| \geq 3$, então G tem uma $\{a, b, c\}$ -rotulação de arestas semiforte. $\square$

Grafos split sem $\mathcal{L}$ -rotulações de arestas semifortes, com $\mathcal{L} = \{a, 2a\}$ e $\mathcal{L} = \{0, a\}$

- Grafo split com $|Q| \geq 6$ e $S = \{u_1\}$ tal que $d_G(u_1) = 1$.

