Rotulações de grafos com restrições nas distâncias

Dia da Combinatória — PGMAT-UFC

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Atílio Gomes Luiz
gomes.atilio@ufc.br

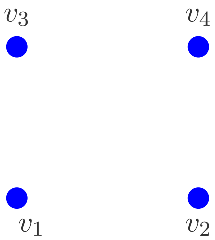
Universidade Federal do Ceará

5 de fevereiro de 2024

Sumário

1. Conceitos Iniciais
2. Motivação
3. Rotulação-L(2,1)
4. Limitantes superiores
5. Grafos com grau máximo 3
6. Resultados
7. Conclusão
8. Anexos

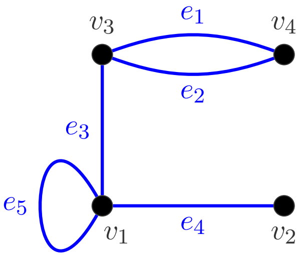
Conceitos Iniciais — Grafos



Grafo G

- $V(G)$

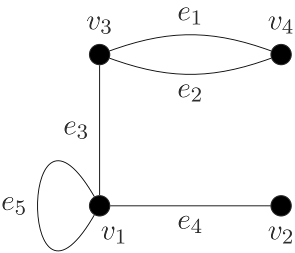
Conceitos Iniciais — Grafos



Grafo G

- $V(G)$
- $E(G)$

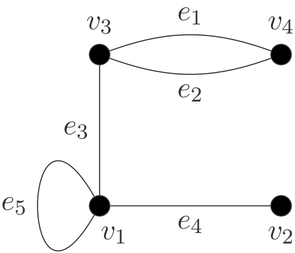
Conceitos Iniciais — Grafos



Grafo G

- $V(G)$
- $E(G)$
- $\psi_G(e_i)$: função de incidência
  - $\psi_G(e_i) = \{v_k v_j\}$
  - v_k e v_j extremos de e_i
  - incidentes

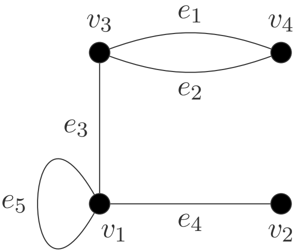
Conceitos Iniciais — Grafos



Grafo G

- $V(G)$
- $E(G)$
- $\psi_G(e_i)$: função de incidência
  - $\psi_G(e_i) = \{v_k v_j\}$
  - v_k e v_j extremos de e_i
  - incidentes
- adjacência

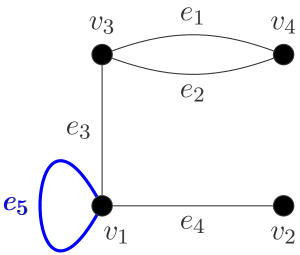
Conceitos Iniciais — Grafos



Grafo G

- $V(G)$
- $E(G)$
- $\psi_G(e_i)$: função de incidência
  - $\psi_G(e_i) = \{v_k v_j\}$
  - v_k e v_j extremos de e_i
  - incidentes
- adjacência
- vizinhos

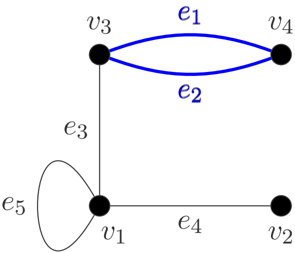
Conceitos Iniciais — Grafos



Grafo G

- $V(G)$
- $E(G)$
- $\psi_G(e_i)$: função de incidência
  - $\psi_G(e_i) = \{v_k v_j\}$
  - v_k e v_j extremos de e_i
  - incidentes
- adjacência
- vizinhos
- e_5 é um laço

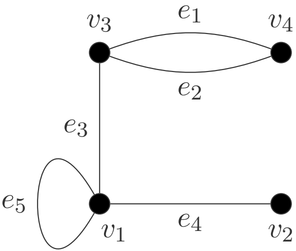
Conceitos Iniciais — Grafos



Grafo G

- $V(G)$
- $E(G)$
- $\psi_G(e_i)$: função de incidência
  - $\psi_G(e_i) = \{v_k v_j\}$
  - v_k e v_j extremos de e_i
  - incidentes
- adjacência
- vizinhos
- e_5 é um laço
- e_1 e e_2 são arestas múltiplas

Conceitos Iniciais — Grafos

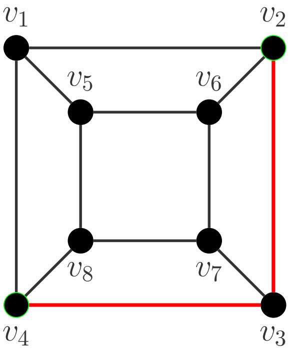


Grafo G

- $V(G)$
- $E(G)$
- $\psi_G(e_i)$: função de incidência
  - $\psi_G(e_i) = \{v_k v_j\}$
  - v_k e v_j extremos de e_i
  - incidentes
- adjacência
- vizinhos
- e_5 é um laço
- e_1 e e_2 são arestas múltiplas
- G é simples se não tem laços nem arestas múltiplas

Distância

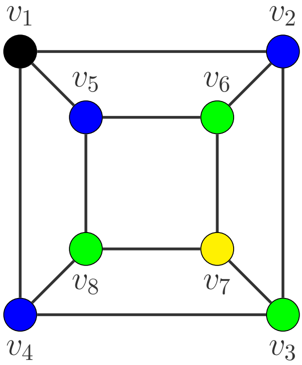
- *Distância* entre dois vértices u e v em um grafo G
- Denotado por $d_G(u, v)$.



$$d_G(v_2, v_4) = 2$$

Vizinhos à distância k

- $N_k(v)$: o conjunto dos vértices à distância k de v



- $N_1(v_1) = \{v_2, v_4, v_5\}$
- $N_2(v_1) = \{v_3, v_6, v_8\}$
- $N_3(v_1) = \{v_7\}$

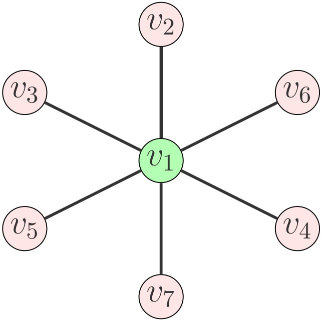
Grau de um vértice

- Grau de um vértice: número de arestas que incidem no vértice (laços contam duas vezes).
- Denotado por $d_G(u)$.

Grau de um vértice

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

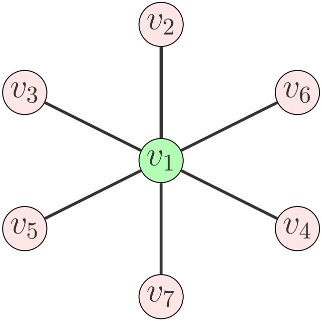
- Grau de um vértice: número de arestas que incidem no vértice (laços contam duas vezes).
- Denotado por $d_G(u)$.



- $d_G(v_1) = 6$
- $d_G(v_i) = 1$ para $2 \leq i \leq 7$

Grau de um vértice

- Grau de um vértice: número de arestas que incidem no vértice (laços contam duas vezes).
- Denotado por $d_G(u)$.

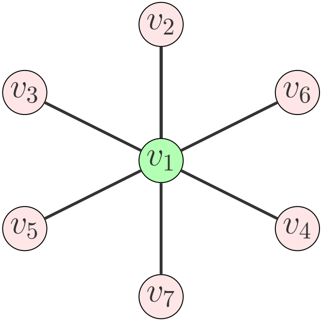


- $d_G(v_1) = 6$
- $d_G(v_i) = 1$ para $2 \leq i \leq 7$
- $\Delta(G)$: Grau máximo de G

Grau de um vértice

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ CAMPUS QUIXADÁ

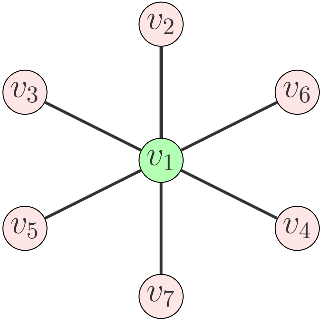
- Grau de um vértice: número de arestas que incidem no vértice (laços contam duas vezes).
- Denotado por $d_G(u)$.



- $d_G(v_1) = 6$
- $d_G(v_i) = 1$ para $2 \leq i \leq 7$
- $\Delta(G)$: Grau máximo de G
- Grafo k-regular:
  todo vértice tem grau k

Grau de um vértice

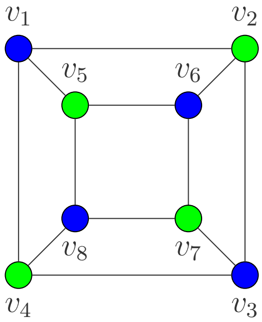
- Grau de um vértice: número de arestas que incidem no vértice (laços contam duas vezes).
- Denotado por $d_G(u)$.



- $d_G(v_1) = 6$
- $d_G(v_i) = 1$ para $2 \leq i \leq 7$
- $\Delta(G)$: Grau máximo de G
- Grafo k-regular:
  todo vértice tem grau k
- Grafo cúbico $=$ grafo 3-regular

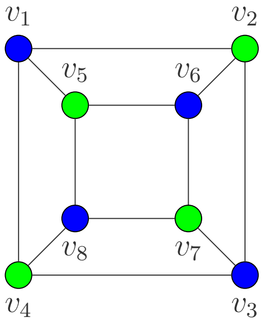
Coloração própria de vértices

- Seja G um grafo sem laços.
- Uma k-coloração própria dos vértices de G é uma atribuição de k cores aos vértices de G de modo que quaisquer dois vértices adjacentes $u, v \in V(G)$ possuam cores distintas.



Coloração própria de vértices

- Seja G um grafo sem laços.
- Uma k-coloração própria dos vértices de G é uma atribuição de k cores aos vértices de G de modo que quaisquer dois vértices adjacentes $u, v \in V(G)$ possuam cores distintas.

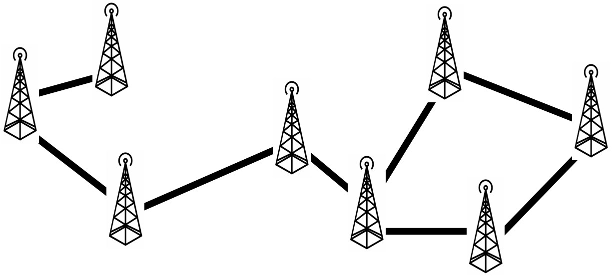


- Número cromático de G: o menor inteiro positivo k para o qual G possui uma k-coloração própria de vértices.
  - Denotado por $\chi(G)$

Motivação

Problema de Atribuição de Frequências (PAF)

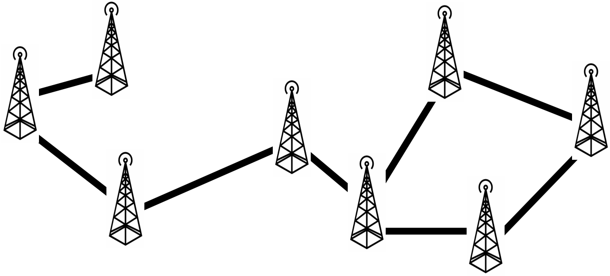
- Neste problema, temos um conjunto de transmissores $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ localizados em alguma região geográfica.



Problema de Atribuição de Frequências (PAF)

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Neste problema, temos um conjunto de transmissores $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ localizados em alguma região geográfica.



- Gostaríamos de atribuir canais de frequência aos transmissores satisfazendo restrições de interferência e de largura de banda, atendendo algum critério de optimalidade.

Problema de Atribuição de Frequências (PAF)

Objetivo

- Uma atribuição de frequências ótima minimiza globalmente uma função de custo que depende do objetivo específico do problema.

- Dois possíveis objetivos são:

Problema de Atribuição de Frequências (PAF)

Objetivo

- Uma atribuição de frequências ótima minimiza globalmente uma função de custo que depende do objetivo específico do problema.

- Dois possíveis objetivos são:

(1) minimizar uma função de largura de banda sujeita a um nível aceitável de interferência. A largura de banda é geralmente tomada como a diferença entre a maior e a menor frequência utilizadas.

Problema de Atribuição de Frequências (PAF)

Objetivo

- Uma atribuição de frequências ótima minimiza globalmente uma função de custo que depende do objetivo específico do problema.

- Dois possíveis objetivos são:

(1) minimizar uma função de largura de banda sujeita a um nível aceitável de interferência. A largura de banda é geralmente tomada como a diferença entre a maior e a menor frequência utilizadas.

(2) minimizar a interferência do sistema (a quantidade de dispositivos que ficarão sem serviço) dada uma atribuição de canais fixa.

Problema de Atribuição de Frequências (PAF)

Objetivo

- Uma atribuição de frequências ótima minimiza globalmente uma função de custo que depende do objetivo específico do problema.

- Dois possíveis objetivos são:

(1) minimizar uma função de largura de banda sujeita a um nível aceitável de interferência. A largura de banda é geralmente tomada como a diferença entre a maior e a menor frequência utilizadas.

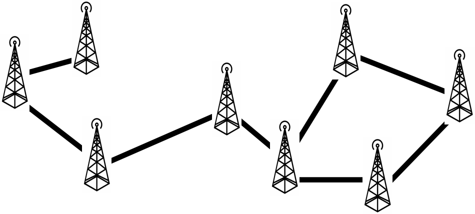
(2) minimizar a interferência do sistema (a quantidade de dispositivos que ficarão sem serviço) dada uma atribuição de canais fixa.

- Focamos no primeiro objetivo.

Problema de Atribuição de Frequências (PAF)

Reutilização de Canais

- Se dois transmissores se interferem, podemos atribuir-lhes canais de frequências diferentes.
- Contudo, se possível, gostaríamos de reutilizar canais de frequências aproveitando a natureza espacial da propagação do sinal de rádio que determina que a potência do sinal é uma função de distância.



Definimos interferência como uma função de frequência e distância.

Abordagens

- **Pesquisa Operacional**
  - Técnicas de programação matemática: programação linear inteira, programação por restrições, etc.
  - Metaheurísticas: algoritmos baseados em biologia computacional
  - Técnicas de Inteligência Artificial: redes neurais, etc.

Abordagens

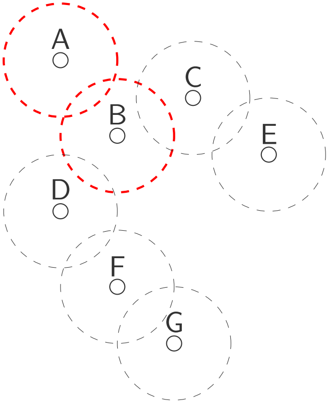
- **Pesquisa Operacional**
  - Técnicas de programação matemática: programação linear inteira, programação por restrições, etc.
  - Metaheurísticas: algoritmos baseados em biologia computacional
  - Técnicas de Inteligência Artificial: redes neurais, etc.

- **Teoria dos Grafos**
  - T-colorings
  - $L(h, k)$-labelings e generalizações
  - Radio Labelings
  - dentre outras ...

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Problema da Atribuição de Canais e a Rotulação-L(2,1)

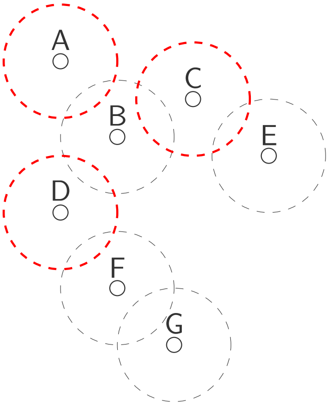
O Problema de Atribuição de Canais



Transmissores muito próximos

Em nosso modelo serão conectados por uma aresta

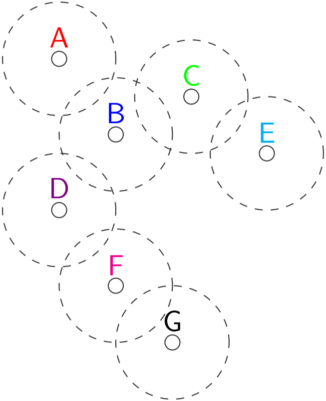
O Problema de Atribuição de Canais

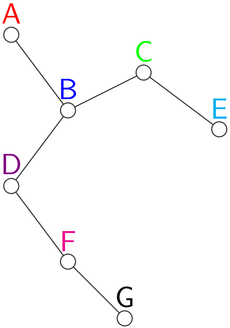


Transmissores próximos o suficiente

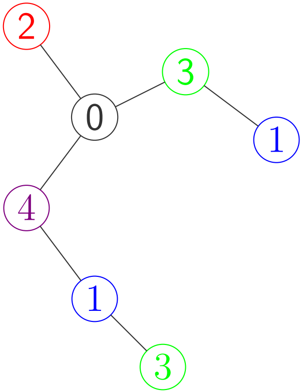
Não serão conectados por aresta, mas sua distância será considerada

Modelagem como grafo





Rotulação-$L(2,1)$

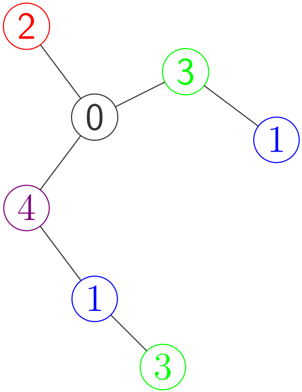


Griggs e Yeh, 1992

Uma rotulação-$L(2,1)$ de um grafo G é uma função $f\colon V(G) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ que satisfaz:

- $|f(u) - f(v)| \geq 2$, se $d_G(u,v) = 1$;
- $|f(u) - f(v)| \geq 1$, se $d_G(u,v) = 2$.

Rotulação-$L(2,1)$



Griggs e Yeh, 1992

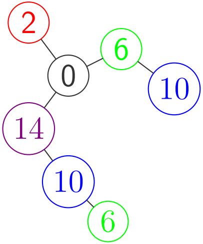
Uma rotulação-$L(2,1)$ de um grafo G é uma função $f\colon V(G) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ que satisfaz:

- $|f(u) - f(v)| \geq 2$, se $d_G(u,v) = 1$;
- $|f(u) - f(v)| \geq 1$, se $d_G(u,v) = 2$.

O span de uma rotulação-L(2,1) f é

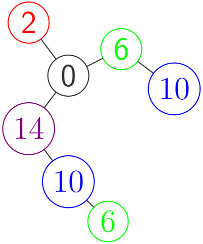
$$\lambda_{2,1}(f) = \max\{|f(u) - f(v)|\colon u, v \in V(G)\}$$

Número Cromático $L(2,1)$



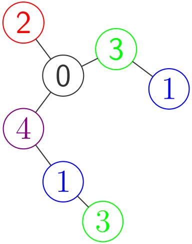
Rotulação f
$\lambda_{2,1}(f) = 14$

Número Cromático $L(2,1)$



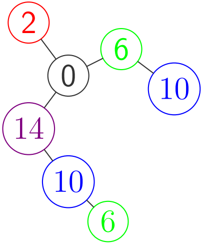
Rotulação f
$\lambda_{2,1}(f) = 14$

$\Longrightarrow$



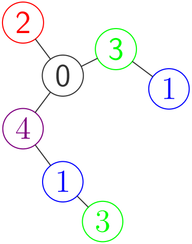
Rotulação f'
$\lambda_{2,1}(f') = 4$

Número Cromático $L(2,1)$



Rotulação f
$\lambda_{2,1}(f) = 14$

$\Longrightarrow$



Rotulação f'
$\lambda_{2,1}(f') = 4$

Número Cromático $L(2,1)$

$\lambda_{2,1}(G) = \min\{\lambda_{2,1}(f) \colon f$ é uma rotulação-$L(2,1)$ de $G\}$

Problema da Rotulação-$L(2,1)$

Problema da Rotulação-L(2,1)

Determinar $\lambda_{2,1}(G)$ para um grafo G arbitrário.

Problema da Rotulação-$L(2,1)$

Problema da Rotulação-L(2,1)

Determinar $\lambda_{2,1}(G)$ para um grafo G arbitrário.

- Determinar $\lambda_{2,1}(G)$ é NP-completo (Griggs e Yeh, 1992)

Problema da Rotulação-$L(2,1)$

Problema da Rotulação-L(2,1)

Determinar $\lambda_{2,1}(G)$ para um grafo G arbitrário.

- Determinar $\lambda_{2,1}(G)$ é NP-completo (Griggs e Yeh, 1992)
- $\lambda_{2,1}(G)$ já foi determinado para algumas classes de grafos
  - Caminhos, Ciclos, Rodas e Completos
  - Árvores (algoritmo polinomial)
  - Grafos de Petersen Generalizados $P(n,k)$ com $k \leq 12$

Problema da Rotulação-$L(2,1)$

Problema da Rotulação-L(2,1)

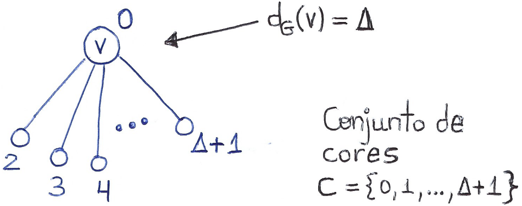
Determinar $\lambda_{2,1}(G)$ para um grafo G arbitrário.

- Determinar $\lambda_{2,1}(G)$ é NP-completo (Griggs e Yeh, 1992)
- $\lambda_{2,1}(G)$ já foi determinado para algumas classes de grafos
  - Caminhos, Ciclos, Rodas e Completos
  - Árvores (algoritmo polinomial)
  - Grafos de Petersen Generalizados $P(n,k)$ com $k \leq 12$
- Limitantes superiores para $\lambda_{2,1}(G)$ já foram estudados para algumas classes:
  - Grafos hipercubos, Grafos de intervalo, Grafos cordais, Grafos exoplanares

Limitantes Inferiores

Lema

$\lambda_{2,1}(G) \geq \Delta(G) + 1$ para todo grafo G.

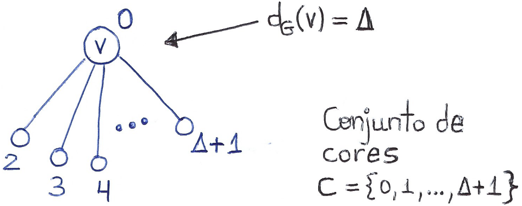


Limitantes Inferiores

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Lema

$\lambda_{2,1}(G) \geq \Delta(G) + 1$ para todo grafo G.



Lema

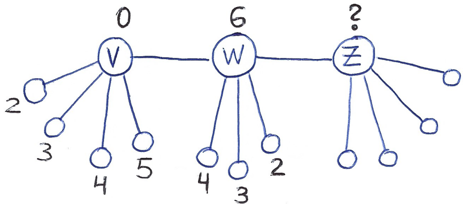
Se G tem uma rotulação-L(2,1) f com span $\Delta(G) + 1$, então, todo $\Delta(G)$-vértice $v \in V(G)$ possui rótulo $f(v) \in \{0, \Delta(G) + 1\}$.

Limitantes Inferiores

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Lema

Se G contém um caminho com 3 vértices v_1, v_2, v_3 tal que $d_G(v_1) = d_G(v_2) = d_G(v_3) = \Delta(G)$, então $\lambda_{2,1}(G) \geq \Delta(G) + 2$.

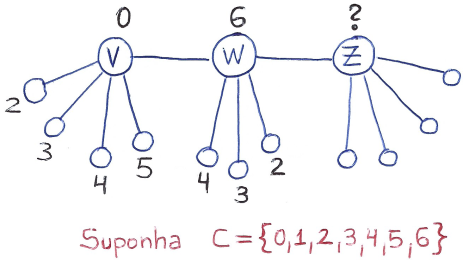


Suponha $C = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

Limitantes Inferiores

Lema

Se G contém um caminho com 3 vértices v_1, v_2, v_3 tal que $d_G(v_1) = d_G(v_2) = d_G(v_3) = \Delta(G)$, então $\lambda_{2,1}(G) \geq \Delta(G) + 2$.



Corolário

Se G é $\Delta(G)$-regular, então $\lambda_{2,1}(G) \geq \Delta(G) + 2$.

Conjectura de Griggs e Yeh

Conjectura de Griggs e Yeh (1992)

Se G é um grafo simples com $\Delta(G) \geq 2$, então

$$\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta(G)^2$$

Conjectura de Griggs e Yeh

Conjectura de Griggs e Yeh (1992)

Se G é um grafo simples com $\Delta(G) \geq 2$, então

$$\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta(G)^2$$

Griggs e Yeh (1992) verificaram essa conjectura para:

Conjectura de Griggs e Yeh

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Conjectura de Griggs e Yeh (1992)

Se G é um grafo simples com $\Delta(G) \geq 2$, então

$$\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta(G)^2$$

Griggs e Yeh (1992) verificaram essa conjectura para:

- Grafos com $\Delta(G) \leq 2$

Conjectura de Griggs e Yeh

Conjectura de Griggs e Yeh (1992)

Se G é um grafo simples com $\Delta(G) \geq 2$, então

$$\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta(G)^2$$

Griggs e Yeh (1992) verificaram essa conjectura para:

- Grafos com $\Delta(G) \leq 2$
- Todo grafo conexo G com $\Delta(G) \geq (n-1)/2$

Conjectura de Griggs e Yeh

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Conjectura de Griggs e Yeh (1992)

Se G é um grafo simples com $\Delta(G) \geq 2$, então

$$\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta(G)^2$$

Griggs e Yeh (1992) verificaram essa conjectura para:

- Grafos com $\Delta(G) \leq 2$
- Todo grafo conexo G com $\Delta(G) \geq (n-1)/2$
- Todo grafo conexo G com diâmetro 2 (limitante apertado)

Conjectura de Griggs e Yeh

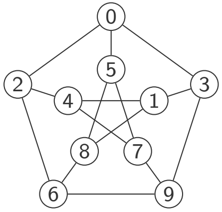
Conjectura de Griggs e Yeh (1992)

Se G é um grafo simples com $\Delta(G) \geq 2$, então

$$\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta(G)^2$$

Griggs e Yeh (1992) verificaram essa conjectura para:

- Grafos com $\Delta(G) \leq 2$
- Todo grafo conexo G com $\Delta(G) \geq (n-1)/2$
- Todo grafo conexo G com diâmetro 2 (limitante apertado)



Conjectura de Griggs e Yeh

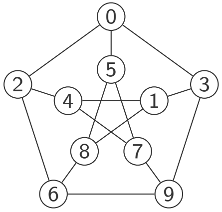
Conjectura de Griggs e Yeh (1992)

Se G é um grafo simples com $\Delta(G) \geq 2$, então

$$\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta(G)^2$$

Griggs e Yeh (1992) verificaram essa conjectura para:

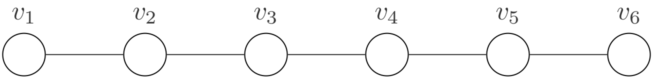
- Grafos com $\Delta(G) \leq 2$
- Todo grafo conexo G com $\Delta(G) \geq (n-1)/2$
- Todo grafo conexo G com diâmetro 2 (limitante apertado)



Essa conjectura continua aberta

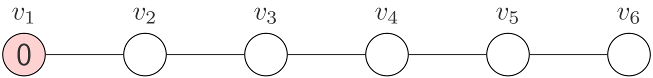
Algoritmo Guloso [Griggs e Yeh 1992]

- Seja G um grafo e $\mathcal{L} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ um conjunto de rótulos.
- Escolha arbitrariamente um vértice $v \in V(G)$ ainda não rotulado e atribua a v o menor rótulo do conjunto $\mathcal{L}$ satisfazendo as condições da rotulação-L(2,1).



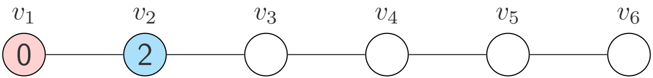
Algoritmo Guloso [Griggs e Yeh 1992]

- Seja G um grafo e $\mathcal{L} = \{0, 1, 2, \dots\}$ um conjunto de rótulos.
- Escolha arbitrariamente um vértice $v \in V(G)$ ainda não rotulado e atribua a v o menor rótulo do conjunto $\mathcal{L}$ satisfazendo as condições da rotulação-L(2,1).



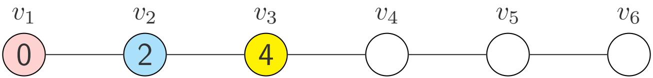
Algoritmo Guloso [Griggs e Yeh 1992]

- Seja G um grafo e $\mathcal{L} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ um conjunto de rótulos.
- Escolha arbitrariamente um vértice $v \in V(G)$ ainda não rotulado e atribua a v o menor rótulo do conjunto $\mathcal{L}$ satisfazendo as condições da rotulação-L(2,1).



Algoritmo Guloso [Griggs e Yeh 1992]

- Seja G um grafo e $\mathcal{L} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ um conjunto de rótulos.
- Escolha arbitrariamente um vértice $v \in V(G)$ ainda não rotulado e atribua a v o menor rótulo do conjunto $\mathcal{L}$ satisfazendo as condições da rotulação-L(2,1).



Algoritmo Guloso [Griggs e Yeh 1992]

- Seja G um grafo e $\mathcal{L} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ um conjunto de rótulos.
- Escolha arbitrariamente um vértice $v \in V(G)$ ainda não rotulado e atribua a v o menor rótulo do conjunto $\mathcal{L}$ satisfazendo as condições da rotulação-L(2,1).

Algoritmo Guloso [Griggs e Yeh 1992]

- Seja G um grafo e $\mathcal{L} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ um conjunto de rótulos.
- Escolha arbitrariamente um vértice $v \in V(G)$ ainda não rotulado e atribua a v o menor rótulo do conjunto $\mathcal{L}$ satisfazendo as condições da rotulação-L(2,1).

Algoritmo Guloso [Griggs e Yeh 1992]

- Seja G um grafo e $\mathcal{L} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ um conjunto de rótulos.
- Escolha arbitrariamente um vértice $v \in V(G)$ ainda não rotulado e atribua a v o menor rótulo do conjunto $\mathcal{L}$ satisfazendo as condições da rotulação-L(2,1).

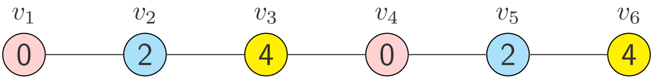
Algoritmo Guloso [Griggs e Yeh 1992]

- Seja G um grafo e $\mathcal{L} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ um conjunto de rótulos.
- Escolha arbitrariamente um vértice $v \in V(G)$ ainda não rotulado e atribua a v o menor rótulo do conjunto $\mathcal{L}$ satisfazendo as condições da rotulação-L(2,1).

- Dado G qualquer, qual o maior rótulo usado?

Algoritmo Guloso [Griggs e Yeh 1992]

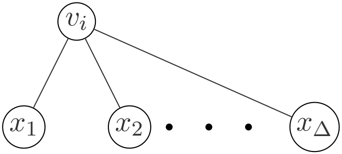
- Seja G um grafo e $\mathcal{L} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ um conjunto de rótulos.
- Escolha arbitrariamente um vértice $v \in V(G)$ ainda não rotulado e atribua a v o menor rótulo do conjunto $\mathcal{L}$ satisfazendo as condições da rotulação-L(2,1).



- Dado G qualquer, qual o maior rótulo usado?
- Para descobrir, vamos contar quantos rótulos estão proibidos no pior caso.

Algoritmo Guloso [Griggs e Yeh 1992]

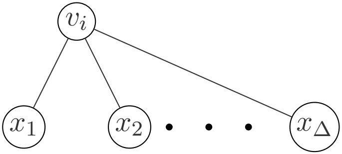
Pior caso: todos os vértices em $N_1(v_i) \cup N_2(v_i)$ já estão rotulados e todos possuem grau máximo.



$d_G(v_i) = \Delta$

Algoritmo Guloso [Griggs e Yeh 1992]

Pior caso: todos os vértices em $N_1(v_i) \cup N_2(v_i)$ já estão rotulados e todos possuem grau máximo.

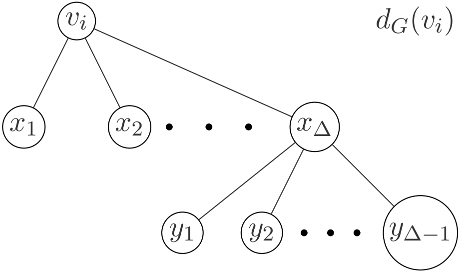


$d_G(v_i) = \Delta$

- Cada vizinho x_j proíbe 3 rótulos: $f(x_j)$, $f(x_j) - 1$ e $f(x_j) + 1$
- Como v_i tem Δ vizinhos, eles proibem 3Δ rótulos em v_i

Algoritmo Guloso [Griggs e Yeh 1992]

Pior caso: todos os vértices em $N_1(v_i) \cup N_2(v_i)$ já estão rotulados e todos possuem grau máximo.

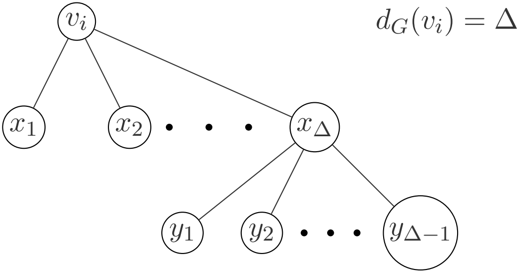


$$d_G(v_i) = \Delta$$

- Existem no máximo $\Delta(\Delta-1)$ vértices à distância 2 de v_i
- Cada um desses vértices proíbe 1 rótulo em v_i
- Logo, eles proíbem no total $\Delta(\Delta-1)$ rótulos em v_i

Algoritmo Guloso [Griggs e Yeh 1992]

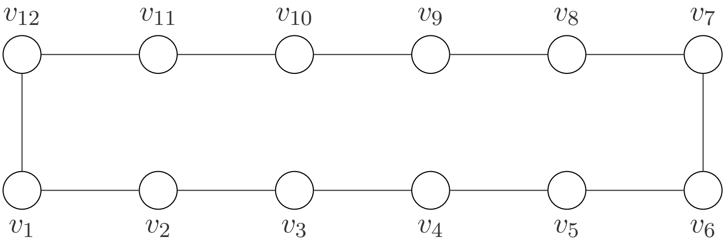
Pior caso: todos os vértices em $N_1(v_i) \cup N_2(v_i)$ já estão rotulados e todos possuem grau máximo.



- Total de rótulos proibidos: $3\Delta + \Delta(\Delta - 1) = \Delta^2 + 2\Delta$
- Logo, o conjunto de cores $\{0, 1, \ldots, \Delta^2 + 2\Delta\}$ basta.
- $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + 2\Delta$.

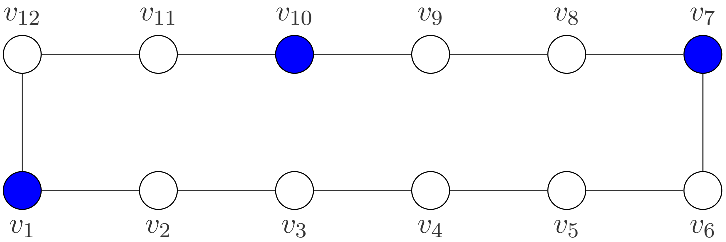
Conjuntos 2-estáveis

- Seja G um grafo.
- Um subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ é dito 2-estável se, para quaisquer dois vértices $u, v \in S$, tem-se $d_G(u, v) > 2$.



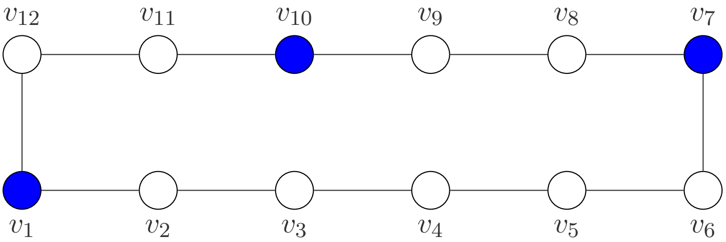
Conjuntos 2-estáveis

- Seja G um grafo.
- Um subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ é dito 2-estável se, para quaisquer dois vértices $u, v \in S$, tem-se $d_G(u, v) > 2$.



Conjuntos 2-estáveis

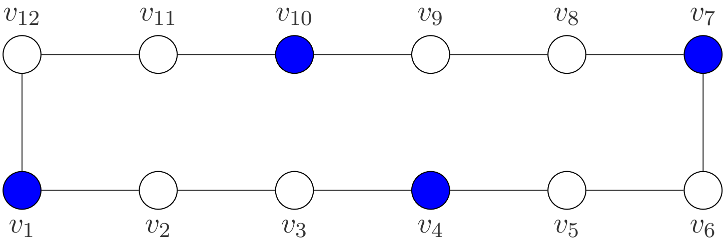
- Seja G um grafo.
- Um subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ é dito 2-estável se, para quaisquer dois vértices $u, v \in S$, tem-se $d_G(u, v) > 2$.



- Um conjunto estável S é maximal se não existe nenhum outro conjunto estável $S' \subseteq V(G)$ tal que $S \subset S'$.

Conjuntos 2-estáveis

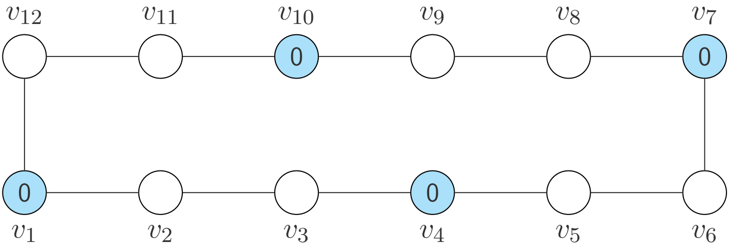
- Seja G um grafo.
- Um subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ é dito 2-estável se, para quaisquer dois vértices $u, v \in S$, tem-se $d_G(u,v) > 2$.



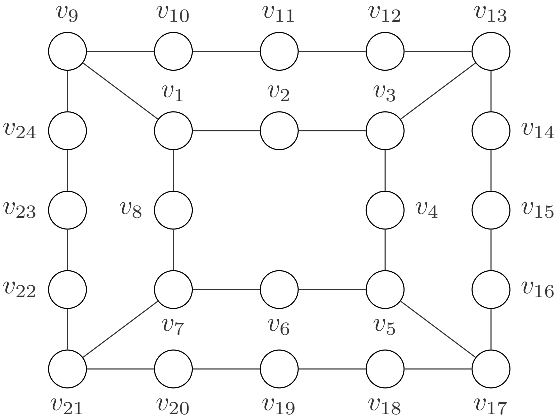
- Um conjunto estável S é maximal se não existe nenhum outro conjunto estável $S' \subseteq V(G)$ tal que $S \subset S'$.

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]

- **Baseado na seguinte ideia:** os vértices de um conjunto 2-estável maximal podem receber o mesmo rótulo.

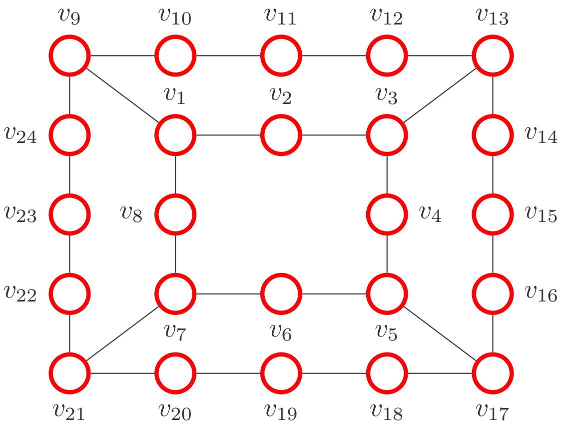


Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



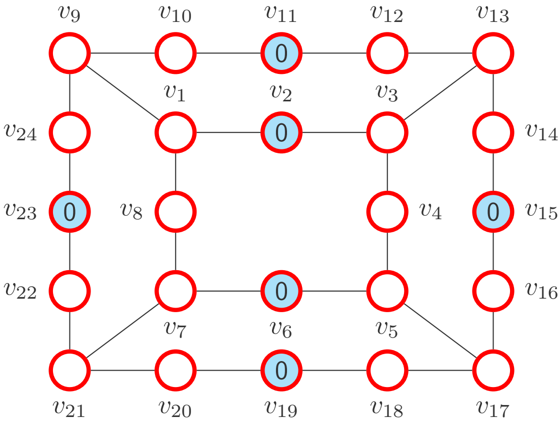
- S_i: conjunto 2-estável maximal (recebem rótulo i) tal que $S_i \subseteq F_i$.
- F_i: conjunto dos vértices não rotulados que estão à distância maior ou igual a 2 dos vértices de S_{i-1}.

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



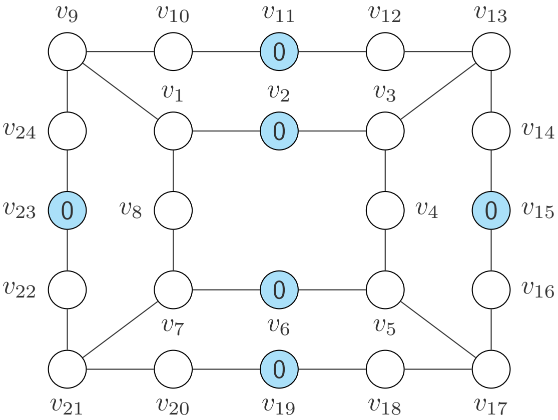
- No início, definimos $S_{-1} = \emptyset$
- $F_0 = V(G)$

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



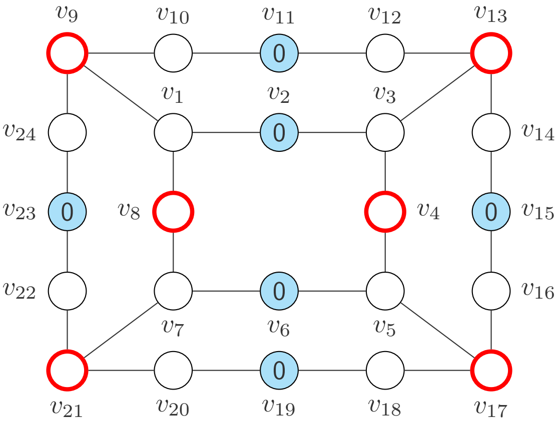
- **Iteração** $i = 0$
  - $F_0 = V(G)$
  - $S_0 = \{v_2, v_6, v_{11}, v_{15}, v_{19}, v_{23}\}$

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



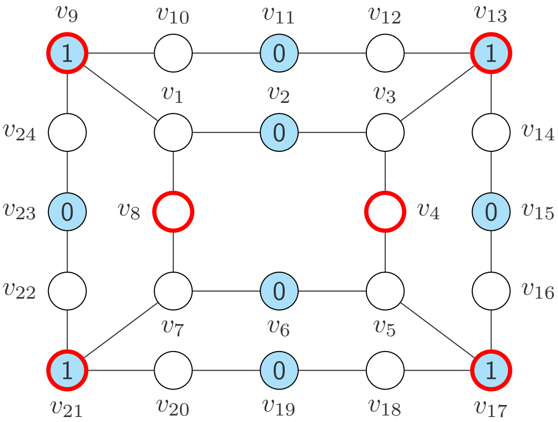
- **Iteração** $i = 0$
  - $F_0 = V(G)$
  - $S_0 = \{v_2, v_6, v_{11}, v_{15}, v_{19}, v_{23}\}$

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



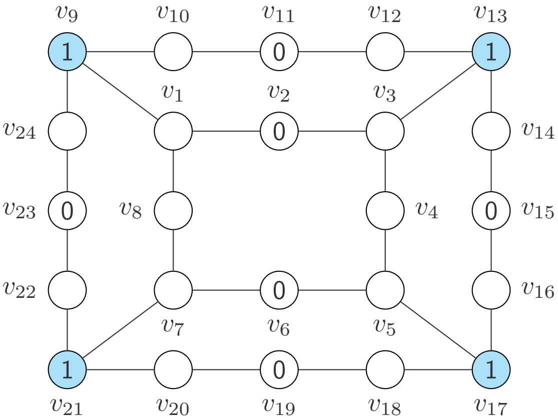
- **Iteração** $i = 1$
  - $F_1 = \{v_4, v_8, v_9, v_{13}, v_{17}, v_{21}\}$

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



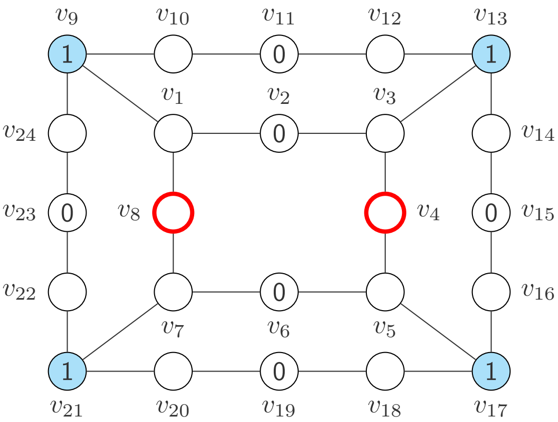
- **Iteração** $i = 1$
  - $F_1 = \{v_4, v_8, v_9, v_{13}, v_{17}, v_{21}\}$
  - $S_1 = \{v_9, v_{13}, v_{17}, v_{21}\}$

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



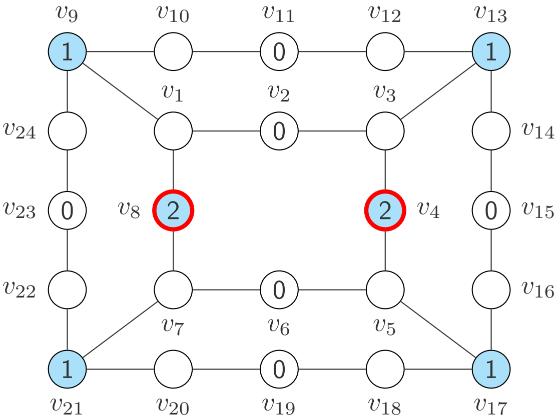
- **Iteração** $i = 1$
  - $F_1 = \{v_4, v_8, v_9, v_{13}, v_{17}, v_{21}\}$
  - $S_1 = \{v_9, v_{13}, v_{17}, v_{21}\}$

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



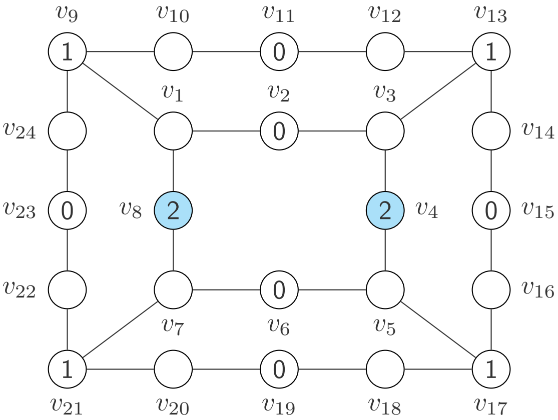
- **Iteração** $i = 2$
  - $F_2 = \{v_4, v_8\}$

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



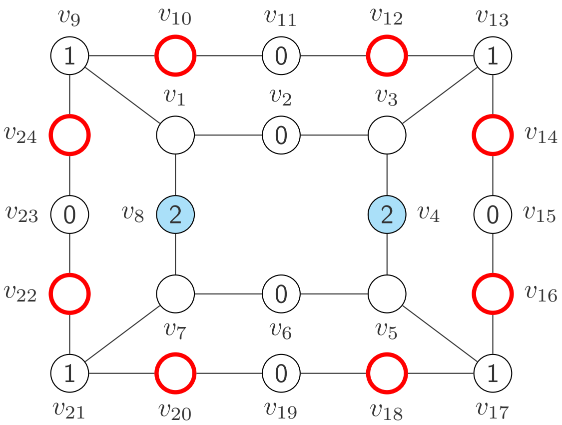
- **Iteração** $i = 2$
  - $F_2 = \{v_4, v_8\}$
  - $S_2 = F_2$

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



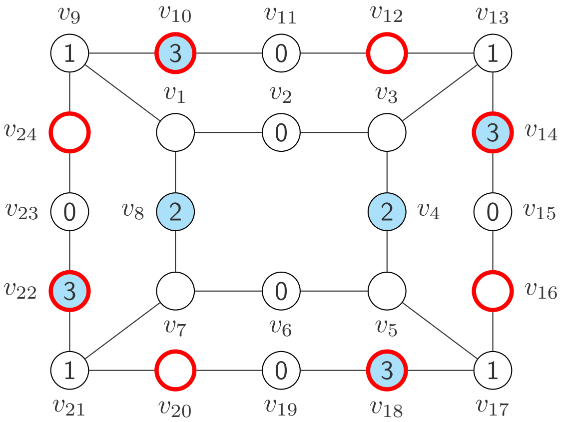
- **Iteração** $i = 2$
  - $F_2 = \{v_4, v_8\}$
  - $S_2 = F_2$

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



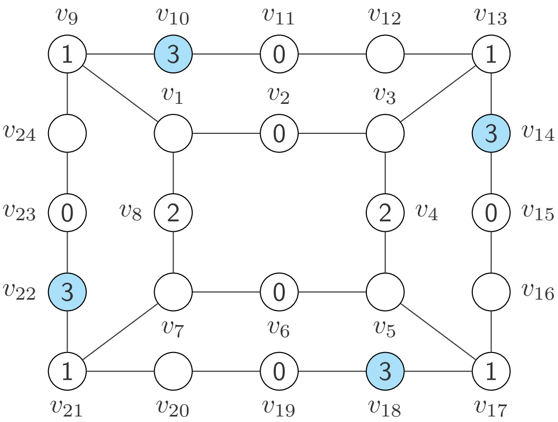
- **Iteração** $i = 3$
  - $F_3 = \{v_{10}, v_{12}, v_{14}, v_{16}, v_{18}, v_{20}, v_{21}, v_{24}\}$

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



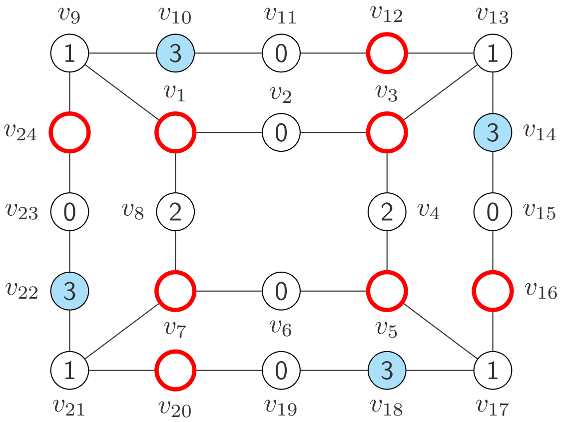
- **Iteração** $i = 3$
  - $F_3 = \{v_{10}, v_{12}, v_{14}, v_{16}, v_{18}, v_{20}, v_{21}, v_{24}\}$
  - $S_3 = \{v_{10}, v_{14}, v_{18}, v_{22}\}$

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



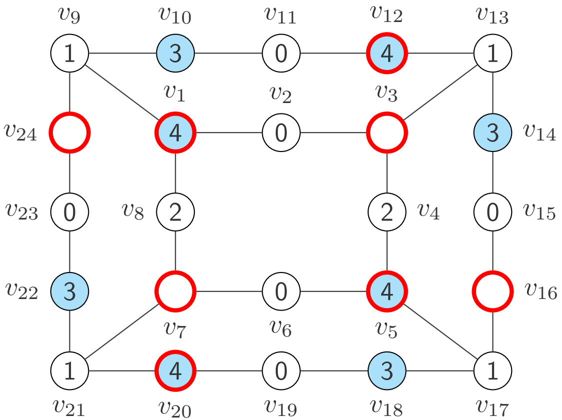
- **Iteração** $i = 3$
  - $F_3 = \{v_{10}, v_{12}, v_{14}, v_{16}, v_{18}, v_{20}, v_{21}, v_{24}\}$
  - $S_3 = \{v_{10}, v_{14}, v_{18}, v_{22}\}$

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



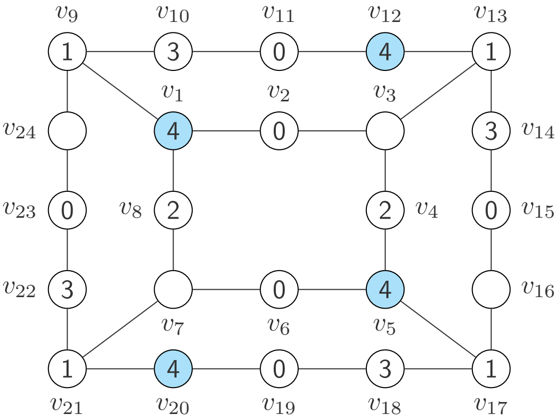
- **Iteração** $i = 4$
  - $F_4 = \{v_1, v_3, v_5, v_7, v_{12}, v_{16}, v_{20}, v_{24}\}$

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



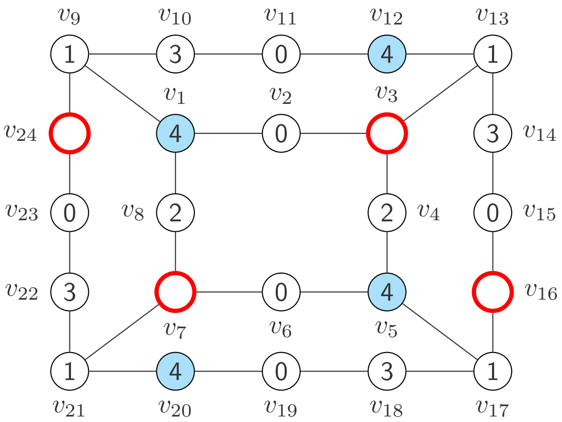
- **Iteração** $i = 4$
  - $F_4 = \{v_1, v_3, v_5, v_7, v_{12}, v_{16}, v_{20}, v_{24}\}$
  - $S_4 = \{v_1, v_5, v_{12}, v_{20}\}$

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



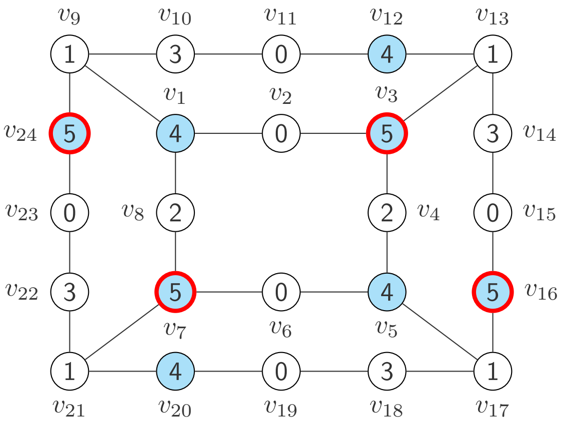
- **Iteração** $i = 4$
  - $F_4 = \{v_1, v_3, v_5, v_7, v_{12}, v_{16}, v_{20}, v_{24}\}$
  - $S_4 = \{v_1, v_5, v_{12}, v_{20}\}$

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



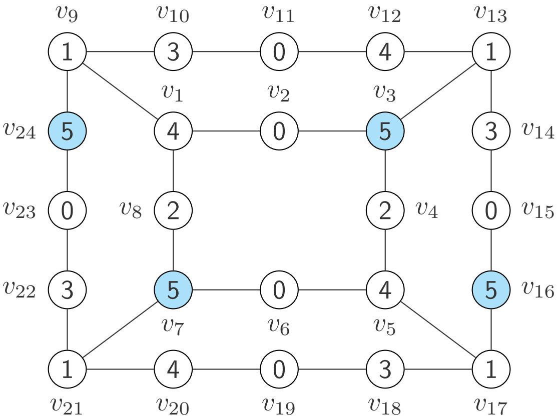
- **Iteração** $i = 5$
  - $F_5 = \{v_3, v_7, v_{16}, v_{24}\}$

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



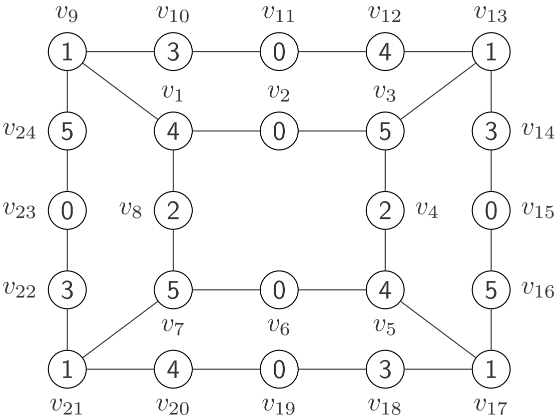
- **Iteração** $i = 5$
  - $F_5 = \{v_3, v_7, v_{16}, v_{24}\}$
  - $S_5 = F_5$

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



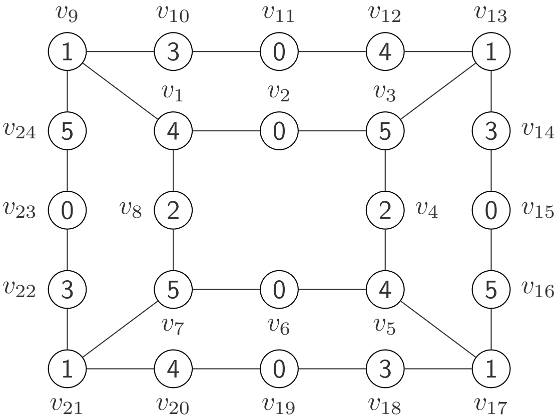
- **Iteração** $i = 5$
  - $F_5 = \{v_3, v_7, v_{16}, v_{24}\}$
  - $S_5 = F_5$

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



- Ao final, temos uma rotulação-L(2,1) de G.

Segundo Algoritmo [Chang e Kuo 1996]



Teorema [Chang e Kuo 1996]

Para todo grafo G com grau máximo Δ, $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + \Delta$.

Prova do Teorema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prova: Seja f a rotulação-L(2,1) obtida em um grafo G após a aplicação do algoritmo. Seja k o maior rótulo usado e $w \in V(G)$ com $f(w) = k$.

Queremos provar que $k \leq \Delta^2 + \Delta$.

Prova do Teorema

Prova: Seja f a rotulação-L(2,1) obtida em um grafo G após a aplicação do algoritmo. Seja k o maior rótulo usado e $w \in V(G)$ com $f(w) = k$.

Queremos provar que $k \leq \Delta^2 + \Delta$.

- $I_1 = \{i\colon 0 \leq i \leq k-1$ e $d(w,y) = 1$ para algum $y \in S_i\}$,

Prova do Teorema

Prova: Seja f a rotulação-L(2,1) obtida em um grafo G após a aplicação do algoritmo. Seja k o maior rótulo usado e $w \in V(G)$ com $f(w) = k$.

Queremos provar que $k \leq \Delta^2 + \Delta$.

- $I_1 = \{i \colon 0 \leq i \leq k-1$ e $d(w,y) = 1$ para algum $y \in S_i\}$,
- $I_2 = \{i \colon 0 \leq i \leq k-1$ e $d(w,y) \leq 2$ para algum $y \in S_i\}$,

Prova do Teorema

Prova: Seja f a rotulação-L(2,1) obtida em um grafo G após a aplicação do algoritmo. Seja k o maior rótulo usado e $w \in V(G)$ com $f(w) = k$.

Queremos provar que $k \leq \Delta^2 + \Delta$.

- $I_1 = \{i\colon 0 \leq i \leq k-1$ e $d(w,y) = 1$ para algum $y \in S_i\}$,
- $I_2 = \{i\colon 0 \leq i \leq k-1$ e $d(w,y) \leq 2$ para algum $y \in S_i\}$,
- $I_3 = \{i\colon 0 \leq i \leq k-1$ e $d(w,y) \geq 3$ para todo $y \in S_i\}$.

Prova do Teorema

Prova: Seja f a rotulação-L(2,1) obtida em um grafo G após a aplicação do algoritmo. Seja k o maior rótulo usado e $w \in V(G)$ com $f(w) = k$.

Queremos provar que $k \leq \Delta^2 + \Delta$.

- $I_1 = \{i \colon 0 \leq i \leq k-1$ e $d(w,y) = 1$ para algum $y \in S_i\}$,
- $I_2 = \{i \colon 0 \leq i \leq k-1$ e $d(w,y) \leq 2$ para algum $y \in S_i\}$,
- $I_3 = \{i \colon 0 \leq i \leq k-1$ e $d(w,y) \geq 3$ para todo $y \in S_i\}$.

Note que $|I_2| + |I_3| = k$.

Prova do Teorema

Prova: Seja f a rotulação-L(2,1) obtida em um grafo G após a aplicação do algoritmo. Seja k o maior rótulo usado e $w \in V(G)$ com $f(w) = k$.

Queremos provar que $k \leq \Delta^2 + \Delta$.

- $I_1 = \{i\colon 0 \leq i \leq k-1$ e $d(w,y) = 1$ para algum $y \in S_i\}$,
- $I_2 = \{i\colon 0 \leq i \leq k-1$ e $d(w,y) \leq 2$ para algum $y \in S_i\}$,
- $I_3 = \{i\colon 0 \leq i \leq k-1$ e $d(w,y) \geq 3$ para todo $y \in S_i\}$.

Note que $|I_2| + |I_3| = k$.

O total de vértices à distância no máximo 2 de w é no máximo $\Delta + \Delta(\Delta - 1) = \Delta^2$. Logo, $|I_2| \leq \Delta^2$

Prova do Teorema

Prova: Seja f a rotulação-L(2,1) obtida em um grafo G após a aplicação do algoritmo. Seja k o maior rótulo usado e $w \in V(G)$ com $f(w) = k$.

Queremos provar que $k \leq \Delta^2 + \Delta$.

- $I_1 = \{i \colon 0 \leq i \leq k-1$ e $d(w,y) = 1$ para algum $y \in S_i\}$,
- $I_2 = \{i \colon 0 \leq i \leq k-1$ e $d(w,y) \leq 2$ para algum $y \in S_i\}$,
- $I_3 = \{i \colon 0 \leq i \leq k-1$ e $d(w,y) \geq 3$ para todo $y \in S_i\}$.

Note que $|I_2| + |I_3| = k$.

O total de vértices à distância no máximo 2 de w é no máximo $\Delta + \Delta(\Delta - 1) = \Delta^2$. Logo, $|I_2| \leq \Delta^2$

Como $d(w) \leq \Delta$, temos que $|I_1| \leq \Delta$. Logo,

$$\lambda_{2,1}(G) \leq k = |I_2| + |I_3| \leq \Delta^2 + |I_3|.$$

Prova do Teorema (cont.)

- Lembre que:
  - $F_i =$ conjunto dos vértices não rotulados que estão à distância maior ou igual a 2 dos vértices de S_{i-1}
  - $I_3 = \{i\colon 0 \leq i \leq k-1$ e $d(w,y) \geq 3$ para todo $y \in S_i\}$.

Prova do Teorema (cont.)

- Lembre que:
  - $F_i =$ conjunto dos vértices não rotulados que estão à distância maior ou igual a 2 dos vértices de S_{i-1}
  - $I_3 = \{i\colon 0 \leq i \leq k-1$ e $d(w,y) \geq 3$ para todo $y \in S_i\}$.

- Para cada $i \in I_3$, $w \notin F_i$ (caso contrário, $S_i \cup \{w\}$ é um subconjunto 2-estável de F_i, contradizendo a maximalidade de S_i)

Prova do Teorema (cont.)

- Lembre que:
  - $F_i =$ conjunto dos vértices não rotulados que estão à distância maior ou igual a 2 dos vértices de S_{i-1}
  - $I_3 = \{i\colon 0 \leq i \leq k-1$ e $d(w,y) \geq 3$ para todo $y \in S_i\}$.
- Para cada $i \in I_3$, $w \notin F_i$ (caso contrário, $S_i \cup \{w\}$ é um subconjunto 2-estável de F_i, contradizendo a maximalidade de S_i)
- Isso implica que $d(w,y) = 1$ para algum vértice $y \in S_{i-1}$; ou seja, $i-1 \in I_1$. Assim, $|I_3| \leq |I_1|$. Então

$$\lambda_{2,1}(G) \leq k = |I_2| + |I_3| \leq |I_2| + |I_1| \leq \Delta^2 + \Delta.$$

$\square$

Limitantes superiores para $\lambda_{2,1}(G)$

Seja G grafo com grau máximo Δ. Então:

- $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + 2\Delta$ [Griggs e Yeh, 1992]

Limitantes superiores para $\lambda_{2,1}(G)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Seja G grafo com grau máximo Δ. Então:

- $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + 2\Delta$ [Griggs e Yeh, 1992]
- $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + \Delta$ [Chang e Kuo, 1996]

Limitantes superiores para $\lambda_{2,1}(G)$

Seja G grafo com grau máximo Δ. Então:

- $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + 2\Delta$ [Griggs e Yeh, 1992]
- $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + \Delta$ [Chang e Kuo, 1996]
- $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 1$ [Král e Skrekovski, 2003]

Limitantes superiores para $\lambda_{2,1}(G)$

Seja G grafo com grau máximo Δ. Então:

- $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + 2\Delta$ [Griggs e Yeh, 1992]
- $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + \Delta$ [Chang e Kuo, 1996]
- $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 1$ [Král e Skrekovski, 2003]
- $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 2$ [Gonçalves, 2006]

Grafos com grau máximo 3

Grafos com $\Delta(G) = 3$

Resultados conhecidos

- A Conjetura de Griggs e Yeh continua aberta mesmo para grafos com $\Delta(G) = 3$.

Grafos com $\Delta(G) = 3$

Resultados conhecidos

- A Conjetura de Griggs e Yeh continua aberta mesmo para grafos com $\Delta(G) = 3$.

- Todo grafo hamiltoniano com $\Delta(G) = 3$ possui $\lambda_{2,1}(G) \leq 9$.
  [Jeong-Hyun Kang, 2008]

Grafos com $\Delta(G) = 3$

Resultados conhecidos

- A Conjetura de Griggs e Yeh continua aberta mesmo para grafos com $\Delta(G) = 3$.

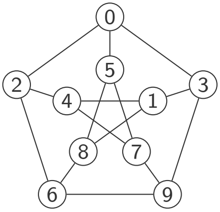
- Todo grafo hamiltoniano com $\Delta(G) = 3$ possui $\lambda_{2,1}(G) \leq 9$.
  [Jeong-Hyun Kang, 2008]

- Grafos exoplanares com grau máximo 3 possuem $\lambda_{2,1}(G) \leq 6$.
  [Li e Zhou, 2013]

Grafos com $\Delta(G) = 3$

Resultados conhecidos

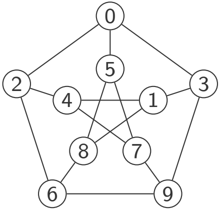
- O grafo de Petersen possui $\lambda_{2,1}(G) = 9$ e todos os demais grafos de Petersen generalizados possuem $\lambda_{2,1}(G) \leq 8$.
  [Georges e Mauro, 2002]



Grafos com $\Delta(G) = 3$

Resultados conhecidos

- O grafo de Petersen possui $\lambda_{2,1}(G) = 9$ e todos os demais grafos de Petersen generalizados possuem $\lambda_{2,1}(G) \leq 8$.
  [Georges e Mauro, 2002]



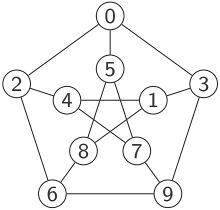
Conjectura [Georges e Mauro 2002]

Com exceção do grafo de Petersen, todo grafo com $\Delta(G) = 3$ possui $\lambda_{2,1}(G) \leq 7$

Grafos com $\Delta(G) = 3$

Resultados conhecidos

- O grafo de Petersen possui $\lambda_{2,1}(G) = 9$ e todos os demais grafos de Petersen generalizados possuem $\lambda_{2,1}(G) \leq 8$.
  [Georges e Mauro, 2002]



Conjectura [Georges e Mauro 2002]

Com exceção do grafo de Petersen, todo grafo com $\Delta(G) = 3$ possui $\lambda_{2,1}(G) \leq 7$

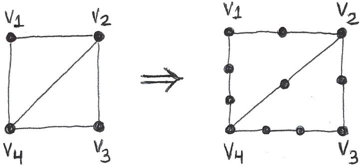
- Todos os grafos de Petersen generalizados com $n \leq 12$ vértices possuem $\lambda_{2,1}(G) \leq 7$.
  [Adams et al.(2006), Y-Z Huang et al.(2012)]

Subdivisões de grafos

Definição

Seja G um grafo e $h \colon E(G) \to \mathbb{N}$ uma função.

Uma *h-subdivisão* de G, denotada por $G_{(h)}$, é o grafo obtido a partir de G substituindo cada aresta $uv \in E(G)$ por um caminho $P = ux_1x_2 \cdots x_{n-1}v$ com n arestas, onde $n = h(uv)$.



$h(v_1v_2) = 2$ $\quad h(v_3v_4) = 3$

$h(v_2v_3) = 2$ $\quad h(v_1v_4) = 3$

$h(v_2v_4) = 2$

Subdivisões de grafos

Definição

- Seja G grafo, $c \in \mathbb{N}$ e $h\colon E(G) \to \mathbb{N}$ uma função.
- Se $h(e) \geq c$ para toda aresta $e \in E(G)$, então denotamos o grafo $G_{(h)}$ por $G_{(\geq c)}$.
- Se $h(e) = c$ para toda $e \in E(G)$, então denotamos o grafo $G_{(h)}$ por $G_{(c)}$.

Subdivisões de grafos

Resultados Preliminares

- $\lambda_{2,1}(G_{(c)}) \leq \Delta + 2$ para todo grafo G e para todo $c \geq 4$. [Lü 2012]
- $\lambda_{2,1}(G_{(3)}) \leq \Delta + 2$ para todo grafo G. [Karst et al. 2015]
- $\lambda_{2,1}(G_{(\geq 4)}) \leq 5$ para todo G com $\Delta(G) = 3$ [Mandal e Panigrahi 2017]

Subdivisões de grafos

Resultados Preliminares

- $\lambda_{2,1}(G_{(c)}) \leq \Delta + 2$ para todo grafo G e para todo $c \geq 4$. [Lü 2012]
- $\lambda_{2,1}(G_{(3)}) \leq \Delta + 2$ para todo grafo G. [Karst et al. 2015]
- $\lambda_{2,1}(G_{(\geq 4)}) \leq 5$ para todo G com $\Delta(G) = 3$ [Mandal e Panigrahi 2017]
- $\lambda_{2,1}(G_{(\geq 2)}) \leq 8$ para todo G com $\Delta(G) = 3$ [Costa e Luiz 2020]
- $\lambda_{2,1}(G_{(\geq 3)}) \leq 6$ para todo G com $\Delta(G) = 3$ [Costa e Luiz 2020]

Resultados

Resultados

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Trabalho conjunto com Robertty Costa(Pargo/UFC)

Teorema

Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\lambda_{2,1}(G_{\geq 3}) \leq 5$.

Teorema

Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\lambda_{2,1}(G_{\geq 8}) = 4$.

Resultado 1

Teorema [Costa e Luiz 2022]

Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\lambda_{2,1}(G_{\geq 3}) \leq 5$.

Resultado 1

Teorema [Costa e Luiz 2022]

Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\lambda_{2,1}(G_{\geq 3}) \leq 5$.

Ilustração da Demonstração:

- Sejam G e $G_{\geq 3}$ como no enunciado. Supomos G conexo.
- Construímos uma rotulação-L(2,1) $f \colon V(G_{\geq 3}) \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

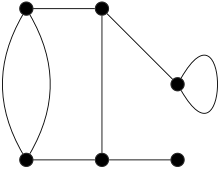
Resultado 1

Teorema [Costa e Luiz 2022]

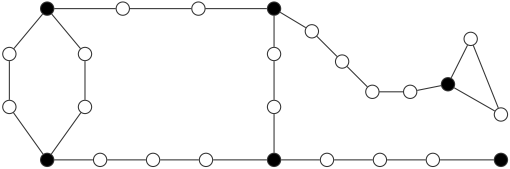
Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\lambda_{2,1}(G_{\geq 3}) \leq 5$.

Ilustração da Demonstração:

- Sejam G e $G_{\geq 3}$ como no enunciado. Supomos G conexo.
- Construímos uma rotulação-L(2,1) $f : V(G_{\geq 3}) \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$



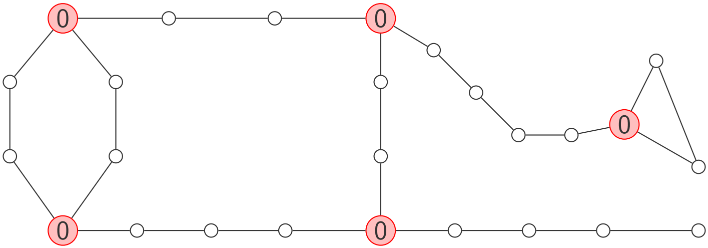
Grafo G



Grafo $G_{\geq 3}$

Ilustração da Demonstração — Etapa 1

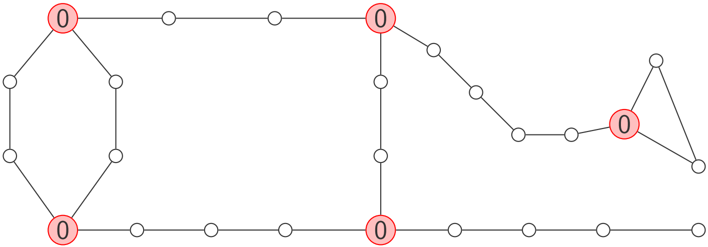
- **Etapa 1:** Para todo $v \in V(G_{\geq 3})$ com $d(v) = 3$, faça $f(v) = 0$.



Grafo $G_{\geq 3}$

Ilustração da Demonstração — Etapa 1

- **Etapa 1:** Para todo $v \in V(G_{\geq 3})$ com $d(v) = 3$, faça $f(v) = 0$.



Grafo $G_{\geq 3}$

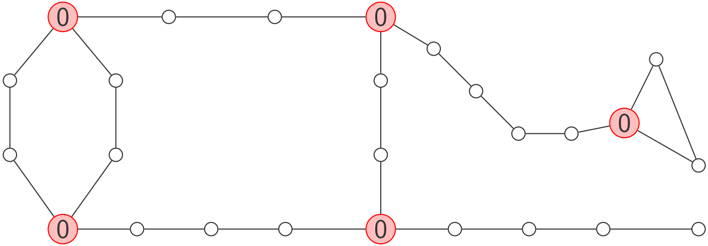
Etapa 2: rotular todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3.
Dificuldade: vértices vizinhos não podem ter cores conflitantes.

Ilustração da Demonstração — Etapa 2

- **Etapa 2:** Rotular todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3.
- Para isso, construímos um grafo auxiliar H a partir de $G_{\geq 3}$

Ilustração da Demonstração — Etapa 2

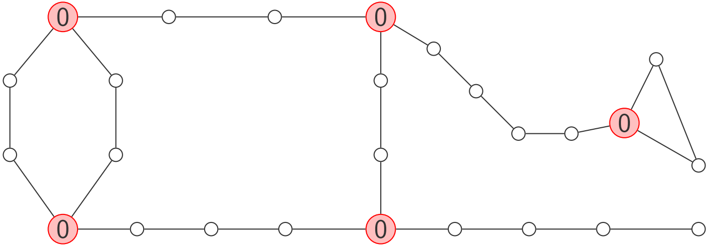
- **Etapa 2:** Rotular todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3.
- Para isso, construímos um grafo auxiliar H a partir de $G_{\geq 3}$



Passo 1: Seja G' uma cópia de $G_{\geq 3}$

Ilustração da Demonstração — Etapa 2

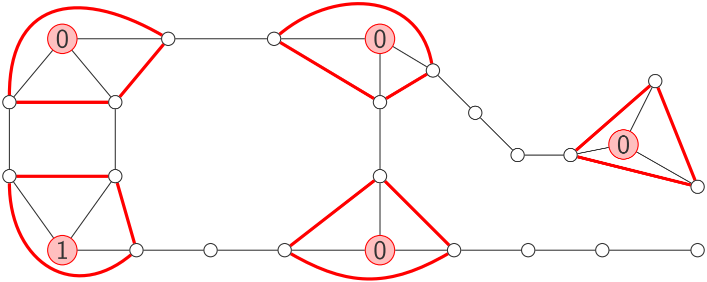
- **Etapa 2:** Rotular todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3.
- Para isso, construímos um grafo auxiliar H a partir de $G_{\geq 3}$



Passo 2: Para todo $v \in V(G')$ com $d(v) = 3$, adicione arestas conectando seus vizinhos, se eles não forem conectados

Ilustração da Demonstração — Etapa 2

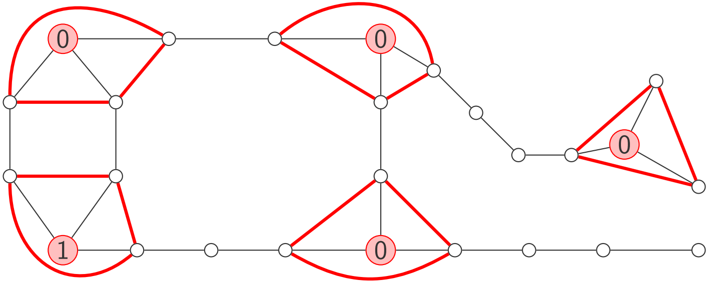
- **Etapa 2:** Rotular todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3.
- Para isso, construímos um grafo auxiliar H a partir de $G_{\geq 3}$



Passo 2: Para todo $v \in V(G')$ com $d(v) = 3$, adicione arestas conectando seus vizinhos, se eles não forem conectados

Ilustração da Demonstração — Etapa 2

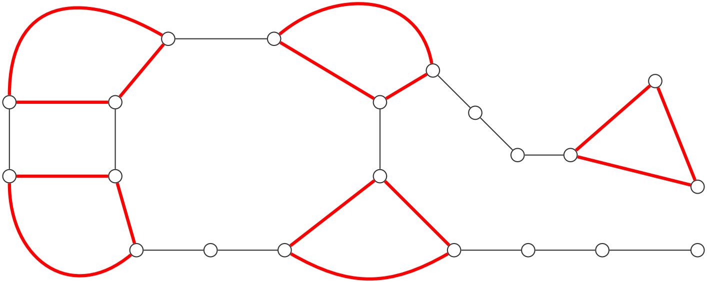
- **Etapa 2:** Rotular todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3.
- Para isso, construímos um grafo auxiliar H a partir de $G_{\geq 3}$



Passo 3: Remova todos os vértices v com $d_{G'}(v) = 3$

Ilustração da Demonstração — Etapa 2

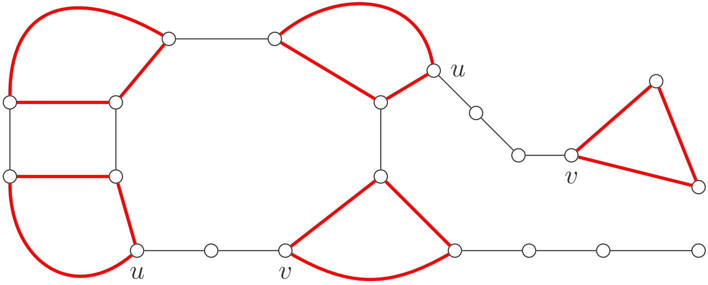
- **Etapa 2:** Rotular todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3.
- Para isso, construímos um grafo auxiliar H a partir de $G_{\geq 3}$



Passo 3: Remova todos os vértices v com $d_{G'}(v) = 3$

Ilustração da Demonstração — Etapa 2

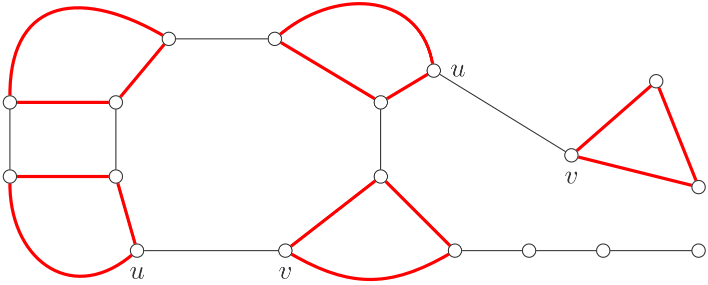
- **Etapa 2:** Rotular todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3.
- Para isso, construímos um grafo auxiliar H a partir de $G_{\geq 3}$



Passo 4: Para cada caminho induzido $P = ux_1x_2 \dots x_nv$, remova seus vértices internos e ligue suas extremidades u e v

Ilustração da Demonstração — Etapa 2

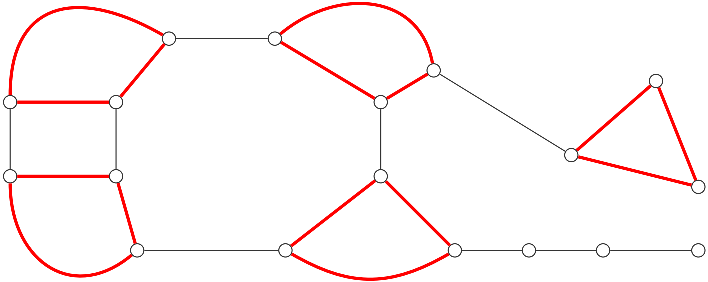
- **Etapa 2:** Rotular todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3.
- Para isso, construímos um grafo auxiliar H a partir de $G_{\geq 3}$



Passo 4: Para cada caminho induzido $P = ux_1x_2 \ldots x_nv$, remova seus vértices internos e ligue suas extremidades u e v

Ilustração da Demonstração — Etapa 2

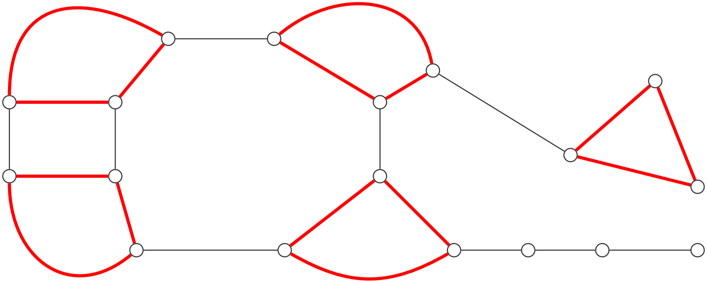
- **Etapa 2:** Rotular todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3.
- Para isso, construímos um grafo auxiliar H a partir de $G_{\geq 3}$



O grafo resultante é o grafo auxiliar H.

Ilustração da Demonstração — Etapa 2

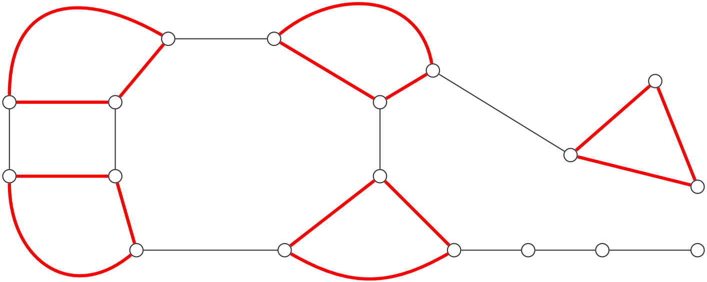
- **Etapa 2:** Rotular todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3.
- Para isso, construímos um grafo auxiliar H a partir de $G_{\geq 3}$



Observação: H possui $\Delta(G) = 3$, logo H não é um ciclo.
Além disso, H não é um grafo completo.

Ilustração da Demonstração — Etapa 2

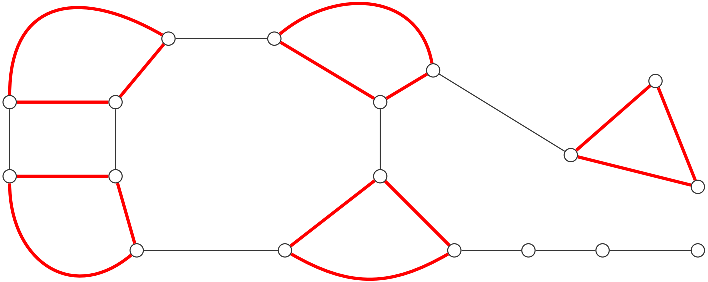
- **Etapa 2:** Rotular todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3.
- Para isso, construímos um grafo auxiliar H a partir de $G_{\geq 3}$



Teorema de Brooks: Se G é um grafo conexo tal que G não é um ciclo nem um grafo completo, então G tem uma coloração própria de vértices com $\Delta(G)$ cores.

Ilustração da Demonstração — Etapa 2

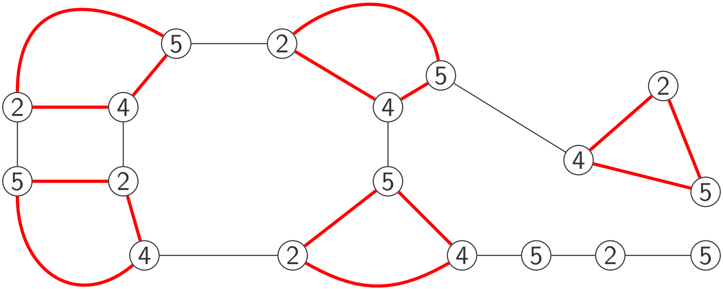
- **Etapa 2:** Rotular todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3.
- Para isso, construímos um grafo auxiliar H a partir de $G_{\geq 3}$



Seja ϕ uma 3-coloração própria de vértices de H com as cores $2, 4, 5$

Ilustração da Demonstração — Etapa 2

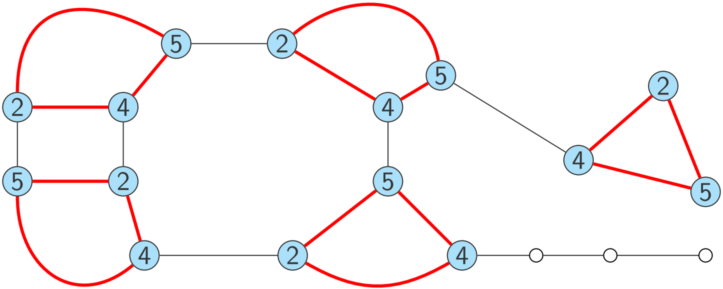
- **Etapa 2:** Rotular todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3.
- Para isso, construímos um grafo auxiliar H a partir de $G_{\geq 3}$



Seja ϕ uma 3-coloração própria de vértices de H com as cores $2, 4, 5$

Ilustração da Demonstração — Etapa 2

- **Etapa 2:** Rotular todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3.
- Para isso, construímos um grafo auxiliar H a partir de $G_{\geq 3}$



Usamos essa coloração própria de vértices de H para rotular os vértices de $G_{\geq 3}$ que são adjacentes a vértices de grau 3 em $G_{\geq 3}$.

Ilustração da Demonstração — Etapa 2

- **Etapa 2:** Rotular todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3.
- Voltamos ao grafo original trazendo os rótulos.

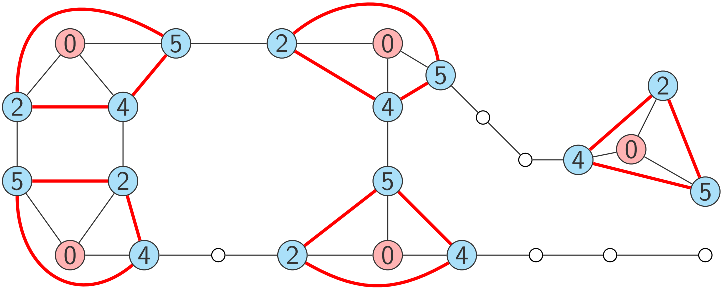


Ilustração da Demonstração — Etapa 2

- **Etapa 2:** Rotular todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3.
- Voltamos ao grafo original trazendo os rótulos.

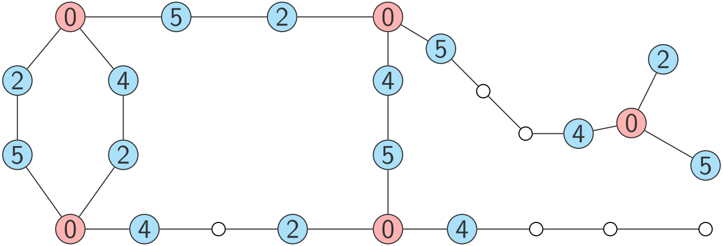


Ilustração da Demonstração — Etapa 2

- **Etapa 2:** Rotular todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3.
- Problema: alguns vértices adjacentes rotulados nesta etapa podem ter rótulos conflitantes!

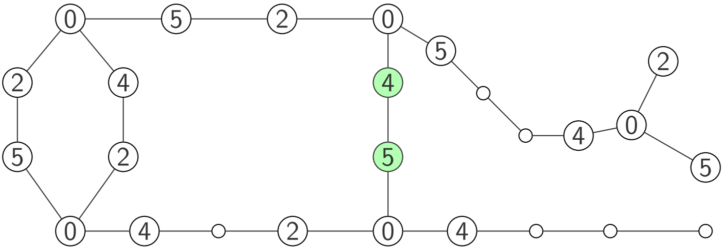
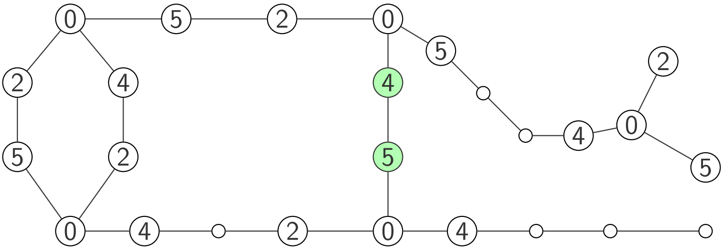


Ilustração da Demonstração — Etapa 2

- **Etapa 2:** Rotular todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3.
- Problema: alguns vértices adjacentes rotulados nesta etapa podem ter rótulos conflitantes!



Atenção: Além disso, ainda restam vértices a serem rotulados. Esses vértices induzem caminhos e serão rotulados na próxima etapa

Ilustração da Demonstração — Etapa 3

- **Etapa 3:** Resolver possíveis conflitos e rotular vértices ainda não rotulados.

Ilustração da Demonstração — Etapa 3

- **Etapa 3:** Resolver possíveis conflitos e rotular vértices ainda não rotulados.
- Considere os caminhos $P = ux_1x_2 \cdots x_n v$, onde $d_G(u) = 3$, $d_G(v) = 3$ e $d_G(x_i) = 2$ para todo $1 \leq i \leq n$.

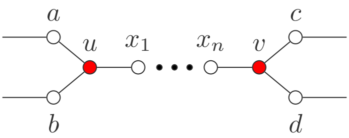
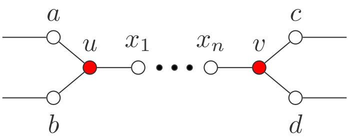


Ilustração da Demonstração — Etapa 3

- **Etapa 3:** Resolver possíveis conflitos e rotular vértices ainda não rotulados.

- Considere os caminhos $P = ux_1x_2 \cdots x_nv$, onde $d_G(u) = 3$, $d_G(v) = 3$ e $d_G(x_i) = 2$ para todo $1 \leq i \leq n$.

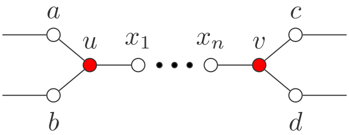


- Lembre que $f(u) = f(v) = 0$ e $f(x_1)$ e $f(x_n)$ pertencem a $\{2, 4, 5\}$.

Ilustração da Demonstração — Etapa 3

- **Etapa 3:** Resolver possíveis conflitos e rotular vértices ainda não rotulados.

- Considere os caminhos $P = ux_1x_2 \cdots x_nv$, onde $d_G(u) = 3$, $d_G(v) = 3$ e $d_G(x_i) = 2$ para todo $1 \leq i \leq n$.



- Lembre que $f(u) = f(v) = 0$ e $f(x_1)$ e $f(x_n)$ pertencem a $\{2, 4, 5\}$.

- Sem perda de generalidade, supomos $f(x_1) > f(x_n)$.

- Rotulamos todos os caminhos P em etapas consecutivas por ordem crescente dos seus comprimentos.

Ilustração da Demonstração — Etapa 3 (cont.)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Caso 1:** Considere caminho P de comprimento 3.

Ilustração da Demonstração — Etapa 3 (cont.)

- **Caso 1:** Considere caminho P de comprimento 3.
- Os vértices x_1 e x_2 já estão rotulados, mas podem estar em conflito!
  - Isso acontece quando $f(x_1) = 5$ e $f(x_2) = 4$

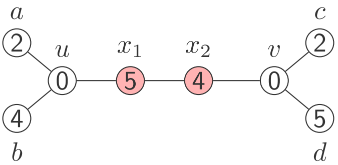
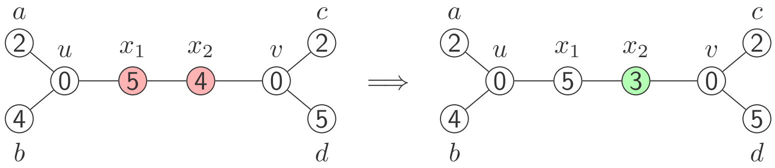


Ilustração da Demonstração — Etapa 3 (cont.)

- **Caso 1:** Considere caminho P de comprimento 3.
- Os vértices x_1 e x_2 já estão rotulados, mas podem estar em conflito!
    - Isso acontece quando $f(x_1) = 5$ e $f(x_2) = 4$



- **Solução:** defina $f(x_2) = 3$.

Ilustração da Demonstração — Etapa 3 (cont.)

- **Caso 2:** Considere caminho P de comprimento 4 com $f(x_1) = 4$.

Ilustração da Demonstração — Etapa 3 (cont.)

- **Caso 2:** Considere caminho P de comprimento 4 com $f(x_1) = 4$.
- Os vértices x_1 e x_3 já estão rotulados, com $f(x_1) > f(x_3)$.

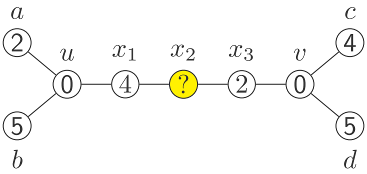
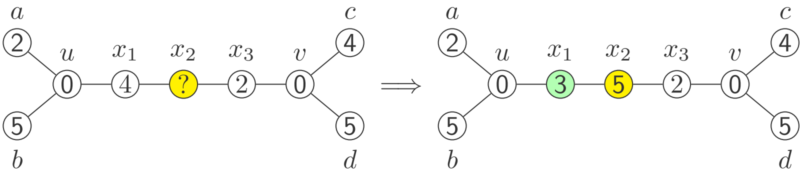


Ilustração da Demonstração — Etapa 3 (cont.)

- **Caso 2:** Considere caminho P de comprimento 4 com $f(x_1) = 4$.
- Os vértices x_1 e x_3 já estão rotulados, com $f(x_1) > f(x_3)$.



- **Solução:** faça $f(x_1) = 3$ e $f(x_2) = 5$.

Ilustração da Demonstração — Etapa 3 (cont.)

- **Caso 3:** Considere caminho P de comprimento 4 com $f(x_1) = 5$.

Ilustração da Demonstração — Etapa 3 (cont.)

- **Caso 3:** Considere caminho P de comprimento 4 com $f(x_1) = 5$.
- Temos dois subcasos, dependendo se $f(x_3) = 4$ ou $f(x_3) = 2$.
- **Subcaso 3.1:** $f(x_3) = 4$.

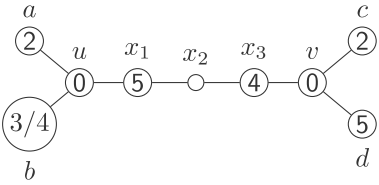
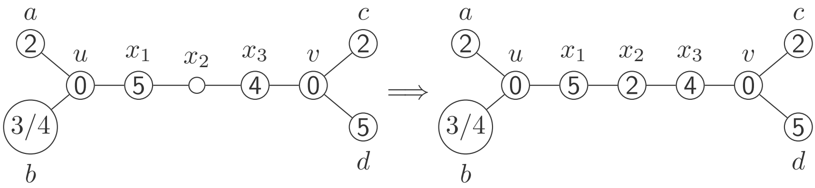


Ilustração da Demonstração — Etapa 3 (cont.)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Caso 3:** Considere caminho P de comprimento 4 com $f(x_1) = 5$.
- Temos dois subcasos, dependendo se $f(x_3) = 4$ ou $f(x_3) = 2$.
- **Subcaso 3.1:** $f(x_3) = 4$.



- **Solução:** faça $f(x_2) = 2$.

Ilustração da Demonstração — Etapa 3 (cont.)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Caso 3:** Considere caminho P de comprimento 4 com $f(x_1) = 5$.
- Temos dois subcasos, dependendo se $f(x_3) = 4$ ou $f(x_3) = 2$.
- **Subcaso 3.2:** $f(x_3) = 2$.

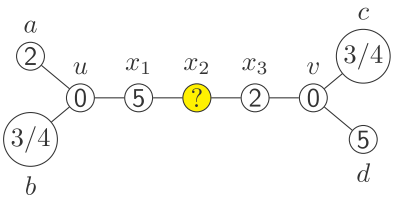
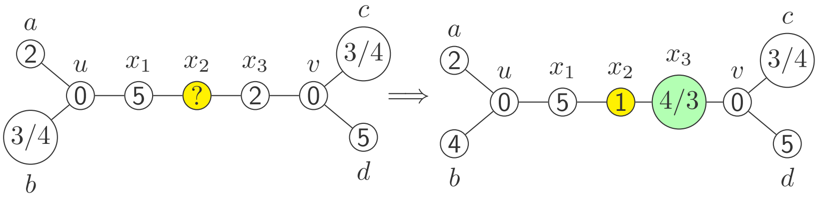


Ilustração da Demonstração — Etapa 3 (cont.)

- **Caso 3:** Considere caminho P de comprimento 4 com $f(x_1) = 5$.
- Temos dois subcasos, dependendo se $f(x_3) = 4$ ou $f(x_3) = 2$.
- **Subcaso 3.2:** $f(x_3) = 2$.



- **Solução:** faça $f(x_2) = 1$ e $f(x_3) = \{3, 4\} \backslash \{f(c)\}$.

Ilustração da Demonstração — Etapa 3 (cont.)

- Existem mais 4 casos e em todos eles, provamos que a rotulação pode ser estendida para o caminho ainda não rotulado.

Ilustração da Demonstração — Etapa 3 (cont.)

- Existem mais 4 casos e em todos eles, provamos que a rotulação pode ser estendida para o caminho ainda não rotulado.

(i) **Caso 4:** P com comprimento 5.

(ii) **Caso 5:** P com comprimento 6.

(iii) **Caso 6:** P com comprimento 7.

Ilustração da Demonstração — Etapa 3 (cont.)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Existem mais 4 casos e em todos eles, provamos que a rotulação pode ser estendida para o caminho ainda não rotulado.

(i) **Caso 4:** P com comprimento 5.

(ii) **Caso 5:** P com comprimento 6.

(iii) **Caso 6:** P com comprimento 7.

(iv) **Caso 7:** P com comprimento maior ou igual a 8.

Ilustração da Demonstração — Etapa 3 (cont.)

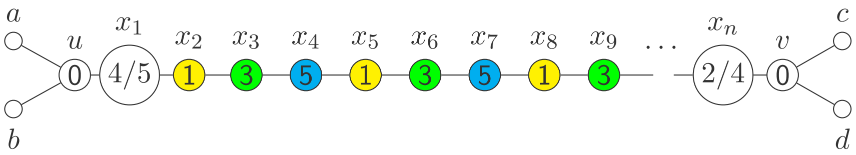
- Existem mais 4 casos e em todos eles, provamos que a rotulação pode ser estendida para o caminho ainda não rotulado.

  (i) **Caso 4:** P com comprimento 5.

  (ii) **Caso 5:** P com comprimento 6.

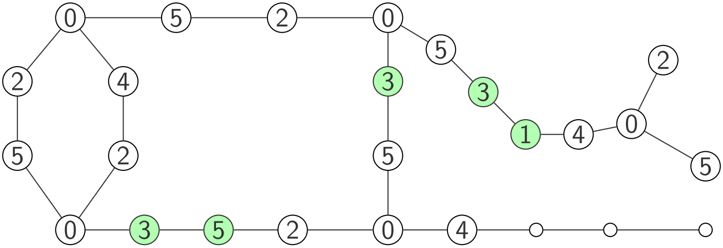
  (iii) **Caso 6:** P com comprimento 7.

  (iv) **Caso 7:** P com comprimento maior ou igual a 8.



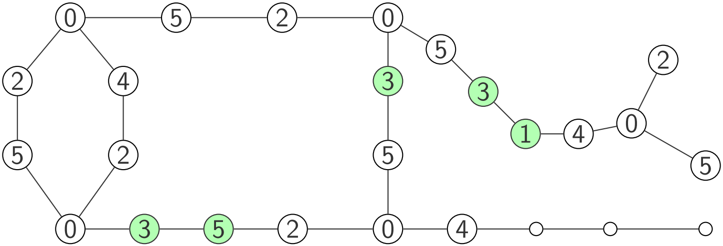
Ao final, podem ocorrer 4 tipos de conflitos entre $f(x_{n-1})$ e $f(x_n)$. Mostramos que cada um deles pode ser resolvido localmente redefinindo alguns rótulos.

Concluindo a ilustração da prova



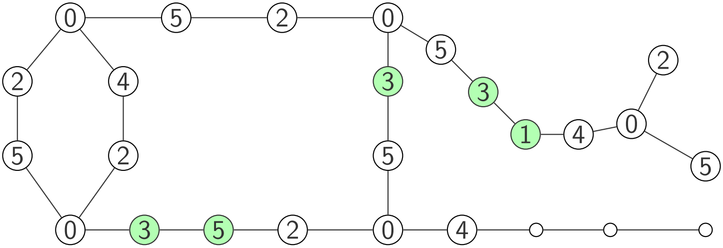
- Vértices em verde foram rotulados na Etapa 3.

Concluindo a ilustração da prova



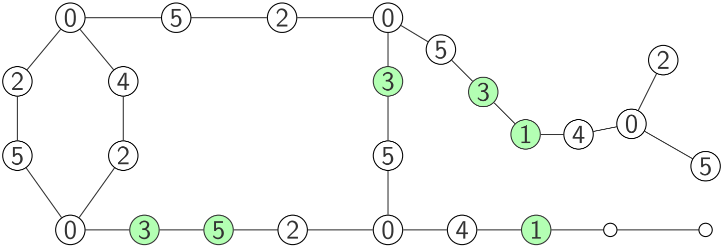
- Vértices em verde foram rotulados na Etapa 3.
- Problema: Falta rotular caminhos onde um dos extremos possui grau 1.

Concluindo a ilustração da prova



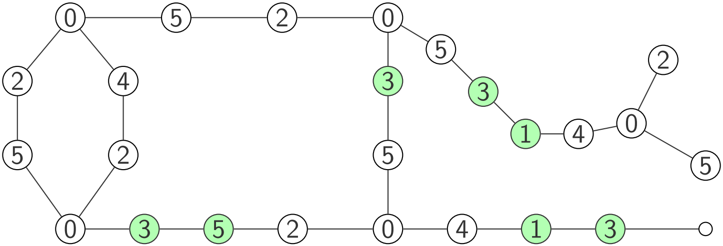
- Vértices em verde foram rotulados na Etapa 3.
- Problema: Falta rotular caminhos onde um dos extremos possui grau 1.
- **Solução:** Uma atribuição gulosa de rótulos ao longo da sequência de vértices do caminho resolve esse problema!

Concluindo a ilustração da prova



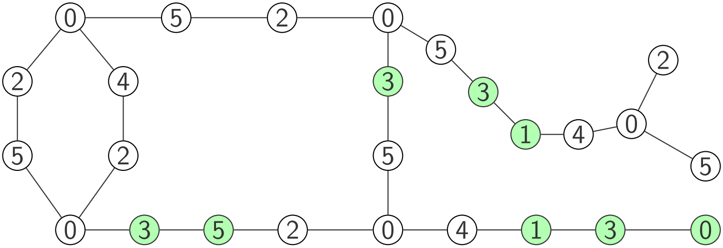
- Vértices em verde foram rotulados na Etapa 3.
- Problema: Falta rotular caminhos onde um dos extremos possui grau 1.
- **Solução:** Uma atribuição gulosa de rótulos ao longo da sequência de vértices do caminho resolve esse problema!

Concluindo a ilustração da prova



- Vértices em verde foram rotulados na Etapa 3.
- Problema: Falta rotular caminhos onde um dos extremos possui grau 1.
- **Solução:** Uma atribuição gulosa de rótulos ao longo da sequência de vértices do caminho resolve esse problema!

Concluindo a ilustração da prova



- Vértices em verde foram rotulados na Etapa 3.

- Problema: Falta rotular caminhos onde um dos extremos possui grau 1.

- **Solução:** Uma atribuição gulosa de rótulos ao longo da sequência de vértices do caminho resolve esse problema!

Exemplo apertado

Assim, provamos o seguinte resultado:

Teorema [Costa e Luiz 2022]

Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\lambda_{2,1}(G_{\geq 3}) \leq 5$.

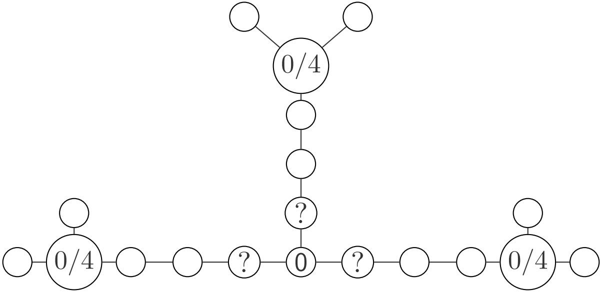
Exemplo apertado

Assim, provamos o seguinte resultado:

Teorema [Costa e Luiz 2022]

Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\lambda_{2,1}(G_{\geq 3}) \leq 5$.

Esse limitante superior é apertado.



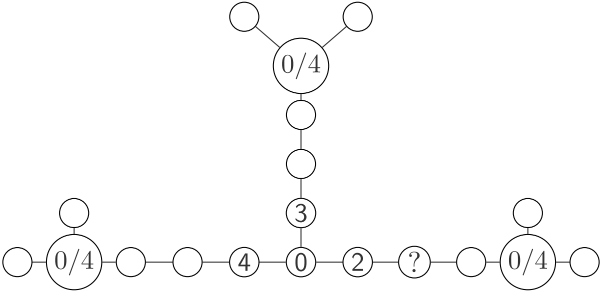
Exemplo apertado

Assim, provamos o seguinte resultado:

Teorema [Costa e Luiz 2022]

Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\lambda_{2,1}(G_{\geq 3}) \leq 5$.

Esse limitante superior é apertado.



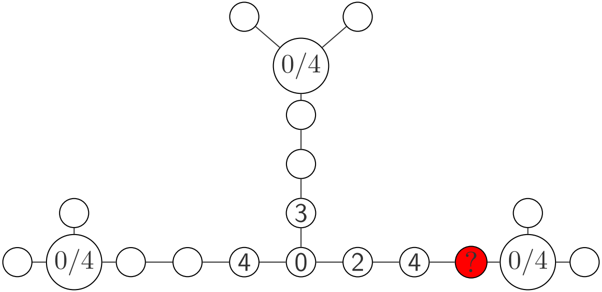
Exemplo apertado

Assim, provamos o seguinte resultado:

Teorema [Costa e Luiz 2022]

Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\lambda_{2,1}(G_{\geq 3}) \leq 5$.

Esse limitante superior é apertado.



Resultado 2

Teorema [Costa e Luiz 2022]

Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\lambda_{2,1}(G_{\geq 8}) = 4$.

Resultado 2

Teorema [Costa e Luiz 2022]

Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\lambda_{2,1}(G_{\geq 8}) = 4$.

Esboço da demonstração:

- Prova construtiva semelhante à anterior.

Resultado 2

Teorema [Costa e Luiz 2022]

Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\lambda_{2,1}(G_{\geq 8}) = 4$.

Esboço da demonstração:

- Prova construtiva semelhante à anterior.
- Sabemos que $\lambda_{2,1}(G_{\geq 8}) \geq \Delta(G_{\geq 8}) + 1 = 4$.

Resultado 2

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema [Costa e Luiz 2022]

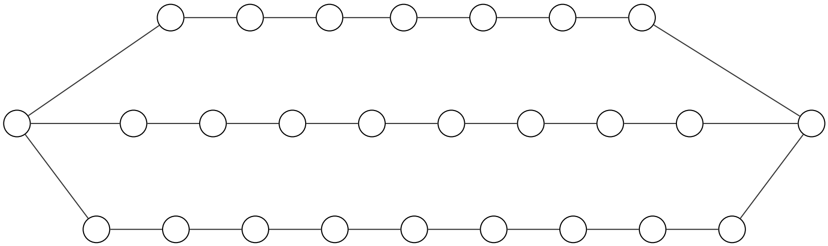
Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\lambda_{2,1}(G_{\geq 8}) = 4$.

Esboço da demonstração:

- Prova construtiva semelhante à anterior.
- Sabemos que $\lambda_{2,1}(G_{\geq 8}) \geq \Delta(G_{\geq 8}) + 1 = 4$.
- Para provar a igualdade, basta construir uma rotulação-L(2,1) de $G_{\geq 8}$ com rótulos em $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

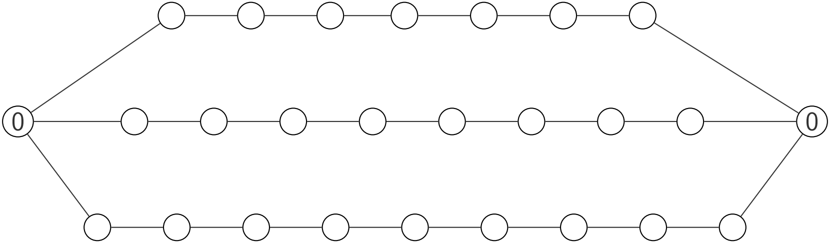
Esboço da demonstração

- **Passo 1:** Atribuímos 0 a todos os vértices de grau 3



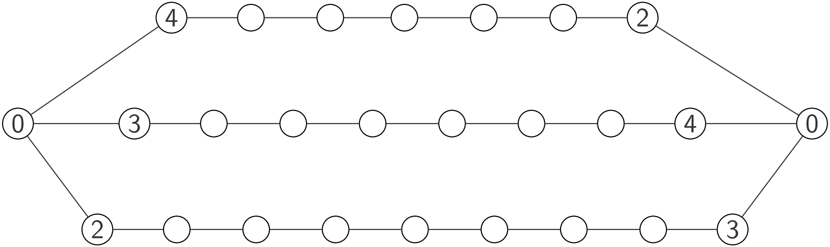
Esboço da demonstração

- **Passo 1:** Atribuímos 0 a todos os vértices de grau 3



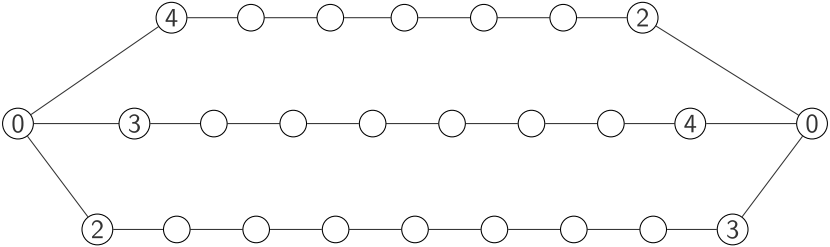
Esboço da demonstração

- **Passo 2:** Usando o grafo auxiliar H, rotulamos os vértices adjacentes a vértices de grau 3 com rótulos $2, 3, 4$ respeitando as condições da rotulação-L(2,1).



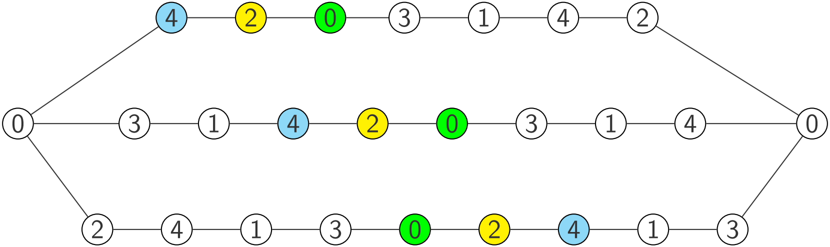
Esboço da demonstração

- **Passo 3:** O grafo induzido pelos vértices não rotulados é uma floresta linear.



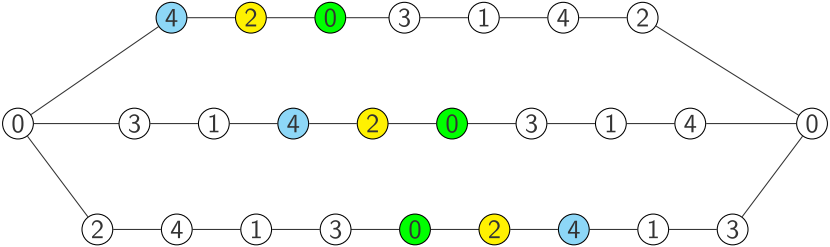
Esboço da demonstração

- **Passo 4:** Usando indução no comprimento dos caminhos, mostramos que a rotulação parcial pode ser estendida para os caminhos resultando em uma rotulação-L(2,1) com rótulos $0, 1, 2, 3, 4$.



Esboço da demonstração

- As sequências $4, 2, 0$ ou $0, 2, 4$ são "repetíveis"
- Assim, obtemos uma 4-rotulação-L(2,1) de $G_{\geq 8}$



Considerações Finais

Conclusão e Trabalhos Futuros

Em trabalho conjunto com Robertty Costa provamos que, para todo grafo G com $\Delta(G) = 3$:

- $\lambda_{2,1}(G_{\geq 2}) \leq 7$
- $\lambda_{2,1}(G_{\geq 3}) \leq 5$ (limitante apertado)
- $\lambda_{2,1}(G_{\geq 6}) = 4$

Conclusão e Trabalhos Futuros

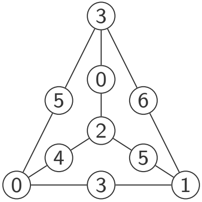
Em trabalho conjunto com Robertty Costa provamos que,
para todo grafo G com $\Delta(G) = 3$:

- $\lambda_{2,1}(G_{\geq 2}) \leq 7$
- $\lambda_{2,1}(G_{\geq 3}) \leq 5$ (limitante apertado)
- $\lambda_{2,1}(G_{\geq 6}) = 4$

Com base em resultados parciais, propomos a seguinte conjectura.

Conjectura

Com exceção do K_4, para todo grafo G com $\Delta(G) = 3$, tem-se $\lambda(G_{\geq 2}) \leq 5$.



Grafo Ruim

Conjecturas

Conjectura de Griggs e Yeh (1992)

Se G é um grafo simples com $\Delta(G) \geq 2$, então

$$\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta(G)^2$$

- Melhor limitante conhecido: $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta(G)^2 + \Delta(G) - 2$
- Essa conjetura encontra-se aberta mesmo para grafos com $\Delta(G) = 3$

Conjecturas

Conjectura de Griggs e Yeh (1992)

Se G é um grafo simples com $\Delta(G) \geq 2$, então

$$\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta(G)^2$$

- Melhor limitante conhecido: $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta(G)^2 + \Delta(G) - 2$
- Essa conjetura encontra-se aberta mesmo para grafos com $\Delta(G) = 3$

Conjectura [Georges e Mauro 2002]

Com exceção do grafo de Petersen, todo grafo com $\Delta(G) = 3$ possui $\lambda_{2,1}(G) \leq 7$

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Obrigado

Referências

- Adams, S. S., Cass, J., Tesch, M., Troxell, D. S., e Wheeland, C. (2007). The minimum span of L(2,1)-labelings of certain generalized Petersen graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 155: 1314-1325.
- Bondy, J. A. e Murty, U. S. R. (2008). *Graph Theory*. Springer Publishing Company, Incorporated.
- Brooks, R. L. (1941). On colouring the nodes of a network. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 37(2):194-197.
- Calamoneri, T. The L(h, k)-labelling problem: An updated survey and annotated bibliography. Available at: http://wwwusers.di.uniroma1.it/~calamo/survey.html, 2014.
- Chang, G. J. e Kuo, D. (1996). The L(2, 1)-labeling problem on graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 9:309-316.
- Fiala, J., Kloks, T., e Kratochivil, J. (2001). Fixed-parameter complexity of λ-labelings. *Discrete Applied Mathematics*, 113(1):59-72.

Referências

- Georges, J. P. e Mauro, D. W. (2002). On generalized Petersen graphs labeled with a condition at distance two. *Discrete Mathematics*, 259:311-318.
- Gonçalves, D. (2008). On the L(p,1)-labelling of graphs. *Discrete Mathematics*, 308(8):1405-1414.
- Griggs, J. R. e Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5(4):586-595.
- Hale, W.K. (1980). Frequency assignment: Theory and applications *Proceedings of the IEEE*, 68 (12):1497-1514.
- Huang, Y.-Z., Chiang, C.-Y., Huang, L.-H., e Yeh, H.-G. (2012). On L(2,1)-labeling of generalized Petersen graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, 24:266-279.
- Kang, J.-H. (2008). L(2, 1)-labeling of Hamiltonian graphs with maximum degree 3. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 22(1):213-230.

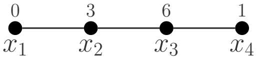
Referências

- Konig, D. (1990). *Theory of Finite and Infinite Graphs*. Birkhauser Boston Inc., Boston.
- Li, X., M.-Hau, V., e Zhou, S. (2013). The L(2, 1)-labelling problem for cubic Cayley graphs on dihedral groups. *Journal of Combinatorial Optimization*, 25:716-736.
- Li, X. e Zhou, S. (2013). Labeling outerplanar graphs with maximum degree three. *Discrete Applied Mathematics*, 161:200-211.

Anexos

Rotulação L(3,2,1)

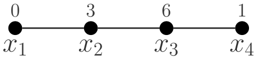
- Uma *rotulação L(3,2,1)* de um grafo G é uma função $f\colon V(G) \to \{0, 1, \ldots, k\}$ tal que, para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$:



(i) Se $d_G(u, v) = 1$, então $|f(u) - f(v)| \geq 3$;
(ii) Se $d_G(u, v) = 2$, então $|f(u) - f(v)| \geq 2$;
(iii) Se $d_G(u, v) = 3$, então $|f(u) - f(v)| \geq 1$.

Rotulação L(3,2,1)

- Uma *rotulação L(3,2,1)* de um grafo G é uma função $f\colon V(G) \to \{0, 1, \ldots, k\}$ tal que, para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$:

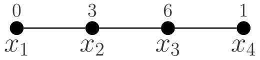


(i) Se $d_G(u, v) = 1$, então $|f(u) - f(v)| \geq 3$;
(ii) Se $d_G(u, v) = 2$, então $|f(u) - f(v)| \geq 2$;
(iii) Se $d_G(u, v) = 3$, então $|f(u) - f(v)| \geq 1$.

- Introduzida por Liu e Shao em 2004.

Rotulação L(3,2,1)

- Uma *rotulação L(3,2,1)* de um grafo G é uma função $f\colon V(G) \to \{0, 1, \ldots, k\}$ tal que, para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$:

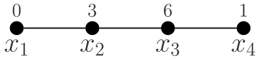


(i) Se $d_G(u, v) = 1$, então $|f(u) - f(v)| \geq 3$;
(ii) Se $d_G(u, v) = 2$, então $|f(u) - f(v)| \geq 2$;
(iii) Se $d_G(u, v) = 3$, então $|f(u) - f(v)| \geq 1$.

- Introduzida por Liu e Shao em 2004.
- Motivação: *Problema de atribuição de frequências*.

Rotulação L(3,2,1)

- Uma *rotulação L(3,2,1)* de um grafo G é uma função $f\colon V(G) \to \{0, 1, \ldots, k\}$ tal que, para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$:



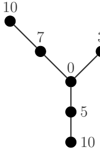
(i) Se $d_G(u, v) = 1$, então $|f(u) - f(v)| \geq 3$;
(ii) Se $d_G(u, v) = 2$, então $|f(u) - f(v)| \geq 2$;
(iii) Se $d_G(u, v) = 3$, então $|f(u) - f(v)| \geq 1$.

- Introduzida por Liu e Shao em 2004.
- Motivação: *Problema de atribuição de frequências*.
- Famílias clássicas
  - Caminhos, ciclos, estrelas, bipartidos completos e etc.

Número cromático L(3,2,1) — $\lambda_{3,2,1}(G)$

Dada uma rotulação L(3,2,1) f de um grafo G:

- *Span*: Maior rótulo k que é atribuido pela rotulação f a um vértice de G.

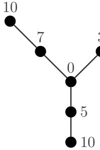


Grafo G com span 10

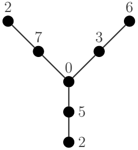
Número cromático L(3,2,1) — $\lambda_{3,2,1}(G)$

Dada uma rotulação L(3,2,1) f de um grafo G:

- *Span*: Maior rótulo k que é atribuido pela rotulação f a um vértice de G.
- Rotulação L(3,2,1) *ótima*: Possui o menor span possível.



Grafo G com span 10

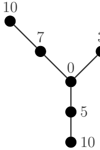


Grafo G com span 7

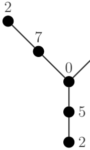
Número cromático L(3,2,1) — $\lambda_{3,2,1}(G)$

Dada uma rotulação L(3,2,1) f de um grafo G:

- *Span*: Maior rótulo k que é atribuido pela rotulação f a um vértice de G.
- Rotulação L(3,2,1) *ótima*: Possui o menor span possível.
- $\lambda_{3,2,1}(G)$: Span de uma rotulação ótima.



Grafo G com span 10

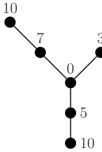


Grafo G com span 7

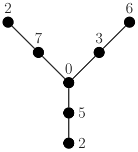
Número cromático L(3,2,1) — $\lambda_{3,2,1}(G)$

Dada uma rotulação L(3,2,1) f de um grafo G:

- *Span*: Maior rótulo k que é atribuido pela rotulação f a um vértice de G.
- Rotulação L(3,2,1) *ótima*: Possui o menor span possível.
- $\lambda_{3,2,1}(G)$: Span de uma rotulação ótima.



Grafo G com span 10



Grafo G com span 7

- Se G é um grafo com grau máximo Δ, então $\lambda_{3,2,1}(G) \geq 2\Delta + 1$.
- Se G é um grafo com grau máximo Δ, então $\lambda_{3,2,1}(G) \leq \Delta^3 + \Delta^2 + 3\Delta$.

Limitante Superior para $\lambda_{3,2,1}(G)$

Teorema 1 [Chia et al. 2011]:
Se G é um grafo com grau máximo Δ, então $\lambda_{3,2,1}(G) \leq \Delta^3 + 2\Delta$

Limitante Superior para $\lambda_{3,2,1}(G)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 1 [Chia et al. 2011]:
Se G é um grafo com grau máximo Δ, então $\lambda_{3,2,1}(G) \leq \Delta^3 + 2\Delta$

- Consequência: Grafos com $\Delta(G) = 3$ possuem $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 33$.

Limitante Superior para $\lambda_{3,2,1}(G)$

> **Teorema 1 [Chia et al. 2011]:**
> Se G é um grafo com grau máximo Δ, então $\lambda_{3,2,1}(G) \leq \Delta^3 + 2\Delta$

- Consequência: Grafos com $\Delta(G) = 3$ possuem $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 33$.
- Pergunta : Existe algum grafo com $\Delta(G) = 3$ que possui $\lambda_{3,2,1}(G) = 33$?

Limitante Superior para $\lambda_{3,2,1}(G)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 1 [Chia et al. 2011]:
Se G é um grafo com grau máximo Δ, então $\lambda_{3,2,1}(G) \leq \Delta^3 + 2\Delta$

- Consequência: Grafos com $\Delta(G) = 3$ possuem $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 33$.
- Pergunta : Existe algum grafo com $\Delta(G) = 3$ que possui $\lambda_{3,2,1}(G) = 33$?
- Objetivo de Pesquisa: Investigar subdivisões de grafos com $\Delta(G) = 3$

Resultados Obtidos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema [Luiz e Florencio 2022]

Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\lambda_{3,2,1}(G_{\geq 2}) \leq 25$.

Resultados Obtidos

Teorema [Luiz e Florencio 2022]

Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\lambda_{3,2,1}(G_{\geq 2}) \leq 25$.

Teorema [Luiz e Florencio 2022]

Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\lambda_{3,2,1}(G_{\geq 4}) \leq 16$.

Resultados Obtidos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema [Luiz e Florencio 2022]

Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\lambda_{3,2,1}(G_{\geq 2}) \leq 25$.

Teorema [Luiz e Florencio 2022]

Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\lambda_{3,2,1}(G_{\geq 4}) \leq 16$.

Teorema [Luiz e Santos 2023]

Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\lambda_{3,2,1}(G_{\geq 4}) \leq 12$.